Expresiones Algebraicas

El lenguaje algebraico

El *lenguaje algebraico* utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritmética, de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas lo que nos permite, formular expresiones algebraicas para luego poder resolver problemas mediante ecuaciones.

Expresión algebraica

Una *expresión algebraica* es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

Monomios

Un *monomio* es la expresión algebraica más sencilla y consiste en el producto de un número por varias letras.

$$4x^2yz^3 \rightarrow \begin{cases} 4 & \rightarrow \text{Coeficiente} \\ x^2yz^3 & \rightarrow \text{Parte Literal} \end{cases}$$

Dos *monomios* son *semejantes* si tienen la misma parte literal.

$5x^3$ y $3x^3$ Son semejantes *$5x$ y $3x^2$ No son semejantes*

El *grado* de un monomio es el número de letras de la parte literal (la suma de todos los exponentes de su parte literal)

El *valor numérico* de un monomio es el valor que se obtiene al sustituir la letra (o letras) por un número (o números) y realizar los cálculos.

El valor numérico de $3x^2$ para $x=2$ es $3\cdot(2)^2 = 3\cdot 4 = 12$

Operaciones con Monomios

Para *sumar* o *restar* monomios, se suman o se restan los coeficientes de los monomios que sean semejantes:

$5x^2 - 3x^2 = 2x^2$ $4x^3 + 7x^3 - 5x^3 = 6x^3$

Para *multiplicar* monomios se multiplican los coeficientes por un lado y las partes literales por otro (Propiedades de las potencias)

$5x^2 \cdot 3x^3 = 15x^5$ $4x^5 \cdot 7x^2 = 28x^7$

Para *dividir* monomios se dividen los coeficientes por un lado y las partes literales por otro.

$10x^4 : 2x^3 = 5x$ $24x^5 : 6x^2 = 4x^3$

Polinomios

Un *polinomio, P(x),* es la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamaremos ***términos*** del polinomio. El coeficiente del término de mayor grado es el *coeficiente principal,* y el término sin letra (de grado 0) se llama *término independiente.* Los representaremos por letras mayúsculas P, Q, R ….y entre paréntesis expresaremos la variable de la que depende. P(x), Q(x)…

$$P(x) = \underbrace{4x^3}_{\text{Término de grado 3}} + \underbrace{3x^2}_{\text{Término de grado 2}} - \underbrace{2x}_{\text{Término de grado 1}} + \underbrace{5}_{\text{Término independiente}}$$

El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de los monomios que los componen.

Grado de P(x) = $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ = 3 (el mayor)

$$4x^3 + 2x^2 + 6x - 7 \rightarrow \begin{cases} \text{grado} : 3 \\ \text{Coef. principal} : 4 \\ \text{Término independiente} : -7 \end{cases}$$

Un polinomio es ***completo*** cuando contiene todos los términos consecutivos, desde el mayor hasta el menor.

$$P(x) = \underbrace{8x^4 + 3x^2 + 2x + 5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}} \qquad Q(x) = \underbrace{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}_{\text{Completo}}$$

El *valor numérico de un polinomio* P(x) para $x=a$, *P(a)*, es el número que se obtiene al cambiar x por el número a, y realizar las operaciones indicadas.

Sea el polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 5 = 3\cdot 1 - 2 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$

$$P(2) = 3(2)^2 + 2(2) + 5 = 3\cdot 4 + 4 + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$$

Un número cualquiera *x=a es raíz de un polinomio P(x),* cero de un polinomio, cuando el valor numérico de dicho polinomio si x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si P(a)=0

Sea el polinomio $P(x) = x^2 - 4$

$$P(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad P(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

2 y -2 son raíces del polinomio x^2-4

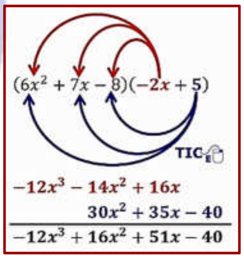
Operaciones con polinomios

Para *sumar o restar* polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes que los componen y damos el resultado en orden decreciente en grado.

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 5x - 2) =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 + x^3 - x^2 + 5x - 2 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) - \underbrace{(x^3 - x^2 + 5x - 2)}_{\text{para restar dos polinomios}} =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 \underbrace{- x^3 + x^2 - 5x + 2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}} = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

Para *multiplicar* dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios o términos del primero por todos los del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.



Para sacar *factor común* en un polinomio se buscan todos los factores comunes (los que se repiten) a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$60x^4 + 18x^3 - 24x^2 = 6x^2(10x^2 + 3x - 4)$$

Identidades Notables

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (2x-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

Suma por diferencia. La suma de dos términos multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (x+3)\cdot(x-3) = x^2 - 9$$

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez.

Un polinomio se puede factorizar de tres maneras:

- Sacando factor común.

$$10x^3 + 2x^2 - 8x = 2x(5x^2 + x - 4) \qquad x^5 - 5x^3 = x^3(x^2 - 5)$$

- Identificando identidades notables.

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)^2 \qquad 4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$$

- Buscando sus raíces. (Resolviendo la ecuación)

Fracciones algebraicas

Una *fracción algebraica* es una fracción en la que tanto el numerador como el denominador son expresiones algebraicas.

$$\frac{x+3}{x-5} \qquad \frac{x+2}{x^2-4} \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$$