10 Figuras planas. Áreas

El regalo

Mientras se sacudía el polvo que el empinado camino había depositado en sus ropas y sus sandalias, Apolonio de Perga miraba con admiración el templo de Artemisa, una de las Siete Maravillas construidas en el mundo.

Tras el parco aseo, volvió su vista hacia los árboles y bajo una higuera encontró descansando a Eudemo, el amigo con quien había quedado.

–La subida es cansada pero merece la pena, el templo es lo más parecido al Olimpo de los dioses que se puede ver en la Tierra –dijo Apolonio sentándose a su lado.

–No lo discuto, Apolonio –contestó Eudemo–. Sin embargo, deberías hacer ofrendas en honor a Atenea, que es la diosa de la sabiduría, y no a Artemisa, diosa de la caza.

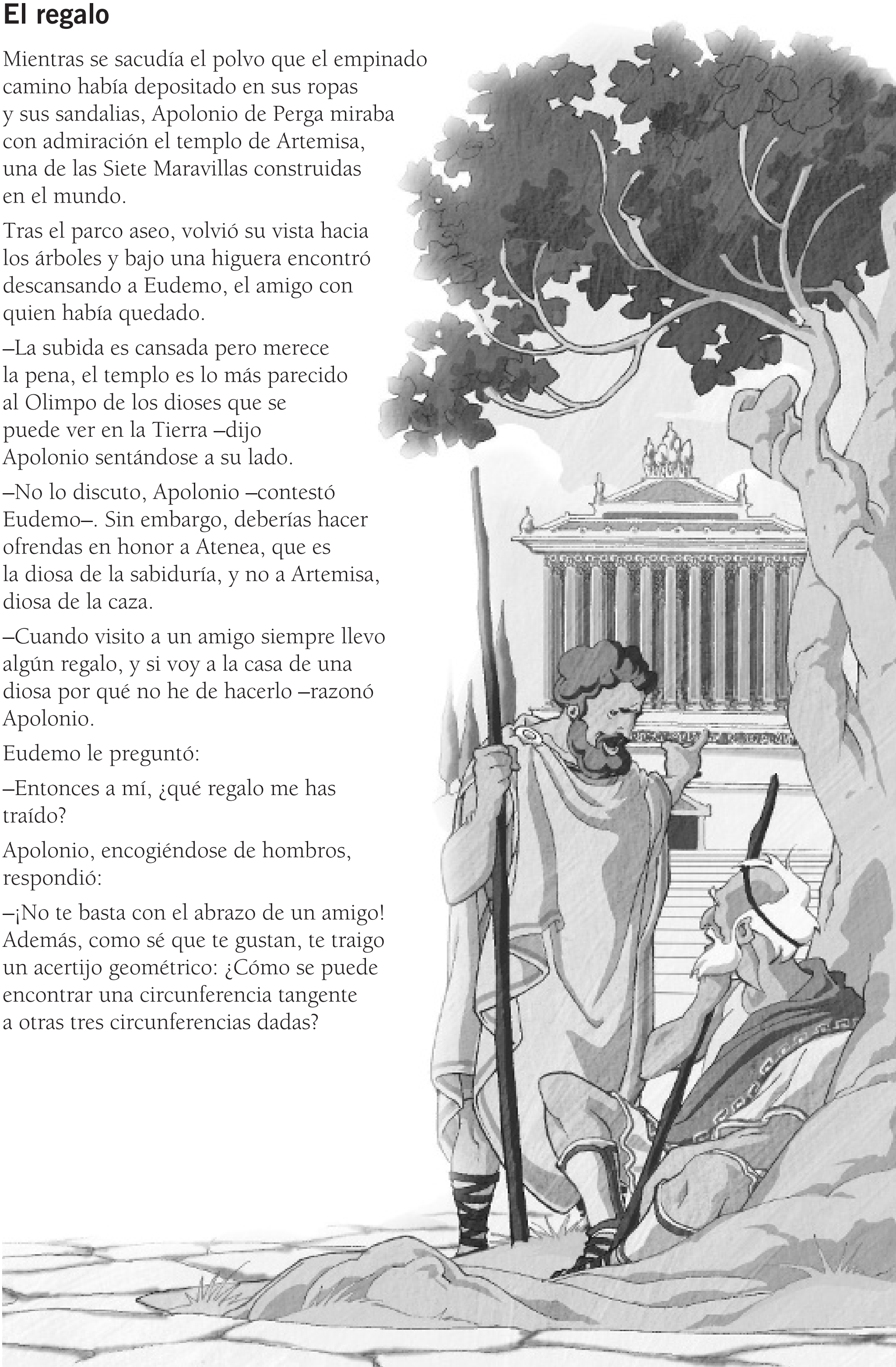
–Cuando visito a un amigo siempre llevo algún regalo, y si voy a la casa de una diosa por qué no he de hacerlo –razonó Apolonio.

Eudemo le preguntó:

–Entonces a mí, ¿qué regalo me has traído?

Apolonio, encogiéndose de hombros, respondió:

–¡No te basta con el abrazo de un amigo! Además, como sé que te gustan, te traigo un acertijo geométrico: ¿Cómo se puede encontrar una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas?



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Sabemos muy poco de la vida de Apolonio de Perga. Busca información sobre este matemático y la época en que vivió.**

Se puede encontrar información sobre la vida de Apolonio de Perga en la página web:
http://www.uantof.cl/estudiomat/historia/griegos/Apolonio/apolonio.html

En la siguiente página se puede completar la información sobre la biografía de Apolonio:
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HistoriaMatematica/apolonio/pag1.htm

2 **Investiga sobre el acertijo que plantea Apolonio a Eudemo en el texto.**

En esta página web se puede obtener información sobre la construcción de una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas:
http://publab03.coseac.unam.mx/ludoteca/Avanzada/circtang.jsp;jsessionid=AEB36556ABA589C44141C09EC4896E45

3 **¿Qué otras aportaciones a las matemáticas realizó Apolonio y cuál es su influencia histórica?**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Apolonio y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

EVALUACIÓN INICIAL

1 **¿Existe un triángulo acutángulo con un ángulo recto? ¿Y uno obtusángulo con dos ángulos obtusos?**

No existe un triángulo acutángulo con un ángulo recto ya que en este tipo de triángulos sus tres ángulos deben ser agudos. Tampoco existe un triángulo obtusángulo con dos ángulos obtusos ya que la suma de los tres ángulos sería mayor que 180º.

2 **¿Se puede dibujar un triángulo con dos ángulos rectos? ¿Y uno obtusángulo con un ángulo recto?**

No se puede dibujar un triángulo con dos ángulos rectos y tampoco uno obtusángulo con un ángulo recto, en cualquiera de los dos casos la suma de los tres ángulos sería mayor que 180º.

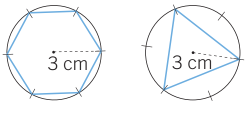
3 **¿Cuánto mide el diámetro de una circunferencia, sabiendo que la longitud de su radio es de 10 cm?**

El diámetro de la circunferencia mide 20 cm.

4 **Si el diámetro de un círculo mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia correspondiente?**

El radio de la circunferencia mide 8 cm.

5 **Dibuja una circunferencia de radio 3 cm y, a partir de ella, construye un hexágono regular y un triángulo equilátero.**



Figuras planas. Áreas

EJERCICIOS

001 **Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son:**

a) 15 cm y 8 cm **b) 12 cm y 35 cm**

a) $h = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ cm b) $h = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$ cm

002 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 cm y 12 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?**

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm

003 **Calcula la diagonal de un rectángulo de 16 m de longitud y 12 m de ancho.**

$d = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$ m

004 **¿Se cumple el teorema de Pitágoras en un triángulo que no sea rectángulo?**

No, solo se cumple en triángulos rectángulos.

005 **Indica si los triángulos con estas medidas son rectángulos, acutángulos u obtusángulos.**

a) 10 cm, 11 cm y 20 cm
b) 4 cm, 5 cm y 6 cm
c) 48 cm, 55 cm y 73 cm

a) $20^2 > 10^2 + 11^2 \rightarrow$ Obtusángulo
b) $6^2 < 4^2 + 5^5 \rightarrow$ Acutángulo
c) $73^2 = 55^2 + 48^2 \rightarrow$ Rectángulo

006 **Sobre un campo rectangular, cuya longitud es de 16 m y su ancho es de 12 m, se traza una diagonal. Calcula su longitud.**

$d = \sqrt{256 + 144} = 20$ m

007 **Determina el largo de un rectángulo de 3 cm de ancho y 22 cm de diagonal.**

$l = \sqrt{488 - 9} = 21{,}79$ cm

008 **Halla la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 18 cm, respectivamente.**

$l = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10{,}82$ cm

009 **Calcula el lado de un cuadrado si su diagonal mide 18 cm.**

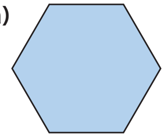
$18^2 = a^2 + a^2 \rightarrow a = 12{,}73$ cm

010 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 7 cm.**

$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6{,}06 \text{ cm}$$

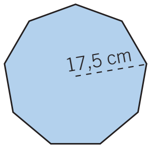
011 **Halla la apotema.**

a)



4 cm

b)



12 cm

a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm b) $a = \sqrt{17{,}5^2 - 6^2} = 16{,}44$ cm

012 **Determina la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y su base 6 cm.**

$$h = \sqrt{8^2 - 3^2} = 7{,}42 \text{ cm}$$

013 **Halla la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 12 cm.**

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 144 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 13{,}86 \text{ cm}$$

014 **Calcula el lado de un hexágono regular de apotema 10 cm.**

$$a^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 11{,}55 \text{ cm}$$

015 **Determina el área de estos polígonos.**

a) Rectángulo cuya altura mide 5,4 cm y su base 9 cm.

b) Cuadrado de lado 6 dm.

c) Romboide cuya base mide 150 mm y su altura, 65 mm.

a) $A = 5{,}4 \cdot 9 = 48{,}6 \text{ cm}^2$

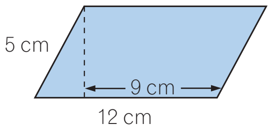
b) $A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ dm}^2$

c) $A = 150 \cdot 65 = 9\,750 \text{ mm}^2$

016 **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal mide 0,06 m.**

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow 36 = 2l^2 \rightarrow l^2 = 18 \text{ cm}^2$ $A = l^2 = 18 \text{ cm}^2$

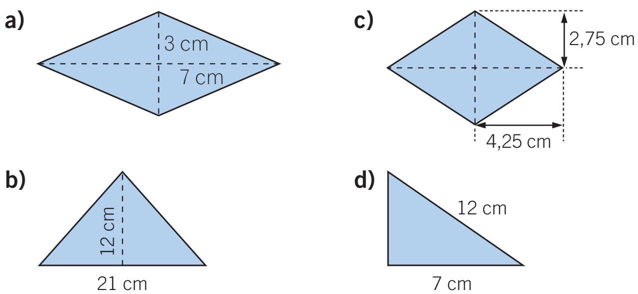
017 **Halla el área de este romboide:**



$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$A = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$$

018 **Calcula el área de estos polígonos.**



a) $A = \dfrac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5 \text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{21 \cdot 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{8{,}5 \cdot 5{,}5}{2} = 23{,}375 \text{ cm}^2$

d) $c = \sqrt{144 - 49} = 9{,}75 \text{ cm} \rightarrow A = \dfrac{7 \cdot 9{,}75}{2} = 34{,}11 \text{ cm}^2$

019 **Determina el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 14 cm y su base, 22 cm.**

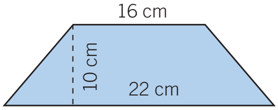
$$h = \sqrt{14^2 - 11^2} = 8{,}66 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{22 \cdot 8{,}66}{2} = 95{,}26 \text{ cm}^2$$

020 **Halla el área de un rombo, sabiendo que su diagonal mayor mide 16 cm y su perímetro, 40 cm.**

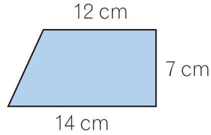
$$\frac{d}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm} \rightarrow d = 12 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

021 **Calcula el área de estos polígonos.**

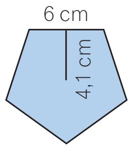
a)



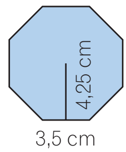
c)



b)



d)



a) $A = \dfrac{16 + 22}{2} \cdot 10 = 190 \text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{30 \cdot 4{,}1}{2} = 61{,}5 \text{ cm}^2$

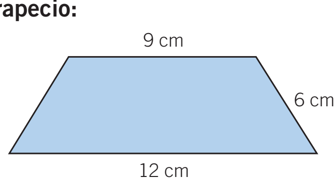
c) $A = \dfrac{(14 + 12) \cdot 7}{2} = 91 \text{ cm}^2$

d) $A = \dfrac{28 \cdot 4{,}25}{2} = 59{,}5 \text{ cm}^2$

022 **Determina el lado de un hexágono regular cuya área mide 374,04 cm² y su apotema, 10,39 cm.**

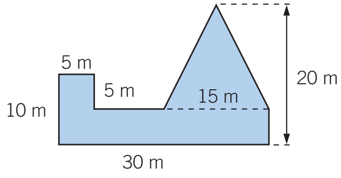
$$374{,}04 = \frac{6 \cdot l \cdot 10{,}39}{2} \rightarrow 748{,}08 = l \cdot 62{,}34 \rightarrow l = 12 \text{ cm}$$

023 **Halla el área de este trapecio:**



$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{12 - 9}{2}\right)^2} = 5{,}81 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{(9 + 12) \cdot 5{,}81}{2} = 61 \text{ cm}^2$$

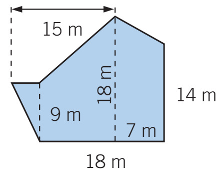
024 **Halla el área de esta figura:**



El área es la suma de las áreas de un cuadrado de lado 5 m, un rectángulo de base 30 m y altura 5 m, y un triángulo de base 15 m y altura 15 m.

$$A = 5^2 + 5 \cdot 30 + \frac{15 \cdot 15}{2} = 25 + 150 + 112{,}5 = 287{,}5 \text{ m}^2$$

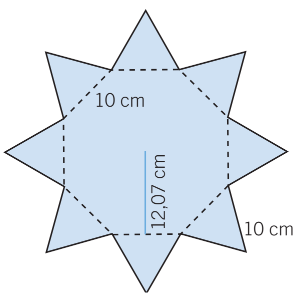
025 **Calcula el área de la figura.**



El área es la suma de las áreas de un triángulo de base 4 m y altura 9 m, y dos trapecios, uno de bases 9 m y 18 m y altura 11 m, y el otro de bases 18 m y 14 m y altura 7 m.

$$A = \frac{9 \cdot 4}{2} + \frac{(9+18) \cdot 11}{2} + \frac{(18+14) \cdot 7}{2} = 18 + 148{,}5 + 112 = 278{,}5 \text{ m}^2$$

026 **Esta estrella de 8 puntas ha sido construida añadiendo a un octógono regular, de lado 10 cm, 8 triángulos equiláteros cuyos lados son iguales que los del octógono. Sabiendo que la apotema del octógono es de 12,07 cm, halla el área de la estrella.**



El área es la suma del área del octógono más el área de los 8 triángulos:

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8 \cdot 12{,}07}{2} + 8 \cdot \frac{8{,}66 \cdot 10}{2} =$$
$$= 482{,}8 + 346{,}4 = 829{,}2 \text{ cm}^2$$

027 **Halla la longitud de una circunferencia con:**

a) Radio de 2,3 cm. **b) Diámetro de 16 cm.**

a) $L = 2\pi \cdot 2{,}3 = 14{,}44$ cm

b) $L = \pi \cdot 16 = 50{,}24$ cm

028 **La longitud de una circunferencia es de 49 cm. Calcula su radio.**

$$r = \frac{49}{2\pi} = 7{,}8 \text{ cm}$$

029 **¿Qué longitud de arco tiene un ángulo de 50° en una circunferencia de 78 cm de longitud?**

$$\frac{50}{360} = \frac{x}{78} \rightarrow x = 10{,}83 \text{ cm}$$

La longitud del arco es 10,83 cm.

030 **En una circunferencia, a un ángulo de 30° le corresponde un arco de 2 cm. Determina el radio y la longitud de la circunferencia.**

$$\frac{30}{360} = \frac{2}{L} \rightarrow L = 24 \text{ cm}$$

$$r = \frac{24}{2\pi} = 3{,}82 \text{ cm}$$

031 **Determina el área de un círculo de radio 18 cm.**

$$A = \pi \cdot 18^2 = 1\,017{,}36 \text{ cm}^2$$

032 **Halla el área de un círculo de diámetro 25 cm.**

$$A = \pi \cdot 12{,}5^2 = 490{,}625 \text{ cm}^2$$

033 **Obtén el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias de radio 100 mm y 7 cm.**

$$A = \pi \cdot (10^2 - 7^2) = 160{,}14 \text{ cm}^2$$

034 **Se ha dividido una tarta de 14 cm de radio en 4 partes iguales. Calcula el área de cada parte.**

$$A = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153{,}86 \text{ cm}^2$$

035 **Halla el área de un círculo inscrito en un cuadrado con diagonal de $\sqrt{50}$ cm.**

El diámetro del círculo coincide con el lado del cuadrado, que aplicando el teorema de Pitágoras es: $l = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5$ cm

Por tanto, el área es: $A = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63$ cm^2

036 **Calcula la suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono regular.**

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero es 180°.
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrado es: $180 \cdot (4 - 2) = 360°$
- La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es: $180 \cdot (5 - 2) = 540°$

037 **Halla, en un eneágono regular:**

a) La suma de sus ángulos interiores.
b) La medida de uno de ellos.

a) La suma de los ángulos interiores es: $180 \cdot (9 - 2) = 1\,260°$

b) La medida de un ángulo interior es: $\frac{1\,260}{9} = 140°$

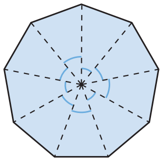
038 **Si la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es 1800°, ¿cuántos lados tiene?**

$180 \cdot (n - 2) = 1800 \rightarrow n = 12$ El polígono tiene 12 lados.

039 **¿Por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para hallar el ángulo interior?**

No se puede aplicar porque no tiene todos los ángulos iguales.

040 **Dibuja los ángulos centrales de un eneágono regular, y halla la amplitud de uno de ellos.**



Amplitud de uno de los ángulos centrales:

$$\frac{360}{9} = 40°$$

041 **Calcula la amplitud de un ángulo central de:**

a) Un octógono regular. **b) Un dodecágono regular.**

a) $\frac{360}{8} = 45°$ b) $\frac{360}{3} = 120°$

042 **Si la amplitud de un ángulo central de un polígono regular es 36°, ¿cuántos lados tiene?**

$$\frac{360}{n} = 36° \rightarrow n = \frac{360}{36} = 10$$

043 **¿Por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para hallar el ángulo central?**

En un polígono irregular lo normal es que no tenga un centro.

044 **Halla el ángulo inscrito en una circunferencia que abarca un arco de:**

a) 40° **b) 104°** **c) 82°** **d) 148°**

a) $\frac{40}{2} = 20°$ b) $\frac{104}{2} = 52°$ c) $\frac{82}{2} = 41°$ d) $\frac{148}{2} = 74°$

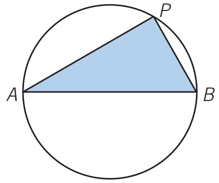
045 **Calcula el ángulo interior de una circunferencia que abarca dos arcos de:**

a) 90° y 30° **b) 48° y 72°** **c) 60° y 120°** **d) 110° y 30°**

a) $\frac{90 + 30}{2} = 60°$ c) $\frac{60 + 120}{2} = 90°$

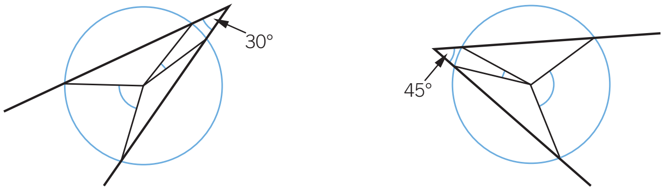
b) $\frac{48 + 72}{2} = 60°$ d) $\frac{110 + 30}{2} = 70°$

046 **Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y marca un diámetro *AB*. Señala un punto *P* de la circunferencia y calcula $\widehat{APB}$.**

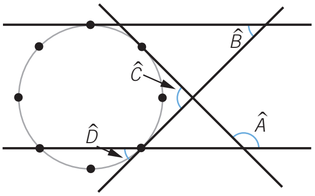


Se forma un ángulo inscrito que abarca un arco de 180°, por lo que el ángulo formado es de 90°.

047 **Traza una circunferencia de radio 3 cm y dibuja dos ángulos exteriores. Determina su medida con la ayuda del transportador.**



048 **Calcula los ángulos señalados.**



$\hat{A} = 180 - \dfrac{180 - 90}{2} = 135°$ $\hat{C} = \dfrac{270 - 90}{2} = 90°$

$\hat{B} = \dfrac{225 - 135}{2} = 45°$ $\hat{D} = \dfrac{90}{2} = 45°$

ACTIVIDADES

049 **Calcula la hipotenusa de los triángulos rectángulos con estos catetos.**

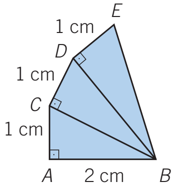
a) 10 cm y 8 cm **c) 4 cm y 9 cm**

b) 7,2 cm y 11,6 cm **d) $\sqrt{5}$ cm y $\sqrt{8}$ cm**

a) $h = 12{,}81$ cm c) $h = 9{,}85$ cm

b) $h = 13{,}65$ cm d) $h = \sqrt{13} = 3{,}61$ cm

050 **Halla la longitud de $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$.**



$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ cm

$\overline{BD} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ cm

$\overline{BE} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7}$ cm

051 **Contesta a estas cuestiones y, en el caso de que sean ciertas, pon un ejemplo.**

a) ¿Puede existir un triángulo rectángulo equilátero?

b) ¿Y un triángulo rectángulo isosceles?

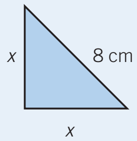
a) No es posible, pues los ángulos de los triángulos equiláteros miden 60°.

b) Sí es posible, por ejemplo un triángulo que tenga los catetos de 1 cm y la hipotenusa de $\sqrt{2}$ cm.

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA MEDIDA DE LOS CATETOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES?

Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 8 cm.



PRIMERO. Se aplica el teorema de Pitágoras, considerando que la medida de los catetos es la misma, *x*.

$$8^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 8^2 = 2x^2$$

SEGUNDO. Se halla el valor de *x*.

$$8^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{8^2}{2} = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

Los catetos miden 5,66 cm.

053 **Halla la medida de los catetos en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 9 cm.**

$$81 = c^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{\frac{81}{2}} = 6{,}36 \text{ cm}$$

054 **Los lados del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ son $\overline{AB} = 8$ cm y $\overline{AC} = 13$ cm. Calcula $\overline{BC}$ si:**

a) El ángulo recto está en el vértice *A*.

b) El ángulo recto está en el vértice *B*.

c) El ángulo recto está en el vértice *C*.

a) *BC* es la hipotenusa: $\overline{BC} = \sqrt{169 + 64} = 15{,}26$ cm

b) *BC* es un cateto: $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10{,}25$ cm

c) *BC* es un cateto: $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10{,}25$ cm

055 **Determina si los triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de su hipotenusa y de sus catetos.**

a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.

b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.

c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y $\sqrt{61}$ cm.

d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

a) $13^2 = 12^2 + 5^2$

Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 13 cm y los catetos miden 5 cm y 12 cm.

b) $12^2 \neq 8^2 + 6^2$

No es un triángulo rectángulo.

c) $61 = 5^2 + 6^2$

Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $\sqrt{61}$ cm y los catetos miden 5 cm y 6 cm.

d) $25^2 = 24^2 + 7^2$

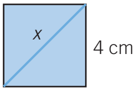
Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 25 cm y los catetos miden 24 cm y 7 cm.

056 **Clasifica en acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

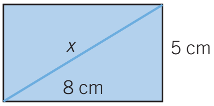
$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 < \overline{CA}^2$	Tipo
4	**8**	**6**	$64 > 16 + 36$	Obtusángulo
3	**8**	**7**	$64 > 9 + 49$	Obtusángulo
5	**10**	**8**	$100 > 25 + 64$	Obtusángulo
5	**10**	**9**	$100 < 25 + 81$	Acutángulo

057 **Calcula la longitud de *x* en estas figuras.**

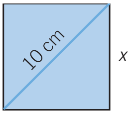
a)



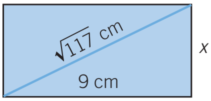
c)



b)



d)



a) $x = \sqrt{2 \cdot 16} = 5,66$ cm

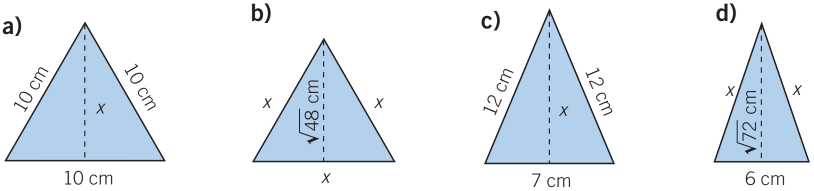
c) $x = \sqrt{25 + 64} = 9,43$ cm

b) $x = \sqrt{\dfrac{100}{2}} = 7,07$ cm

d) $x = \sqrt{117 - 81} = 6$ cm

058 Determina la longitud de *x* en estos triángulos.

a) b) c) d)



a) $x = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66$ cm

b) $x = \sqrt{\dfrac{4}{3} \cdot 48} = 8$ cm

c) $x = \sqrt{144 - 12{,}25} = 11{,}48$ cm

d) $x = \sqrt{72 + 9} = 9$ cm

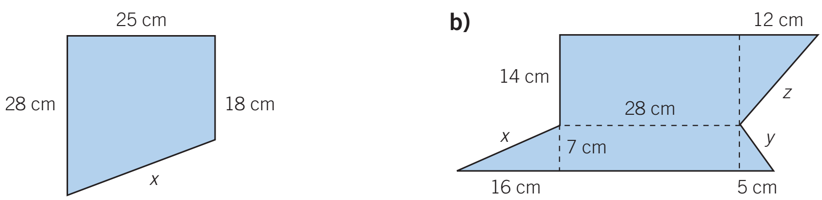
059 Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 48 cm.

El lado del triángulo mide 16 cm.

La altura mide: $h = \sqrt{\dfrac{3}{4} \cdot 256} = 13{,}86$ cm

060 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a) b)



a) $x = \sqrt{(28 - 18)^2 + 25^2} = \sqrt{725} = 26{,}93$ cm

$P = 25 + 28 + 18 + 26{,}93 = 97{,}93$ cm

b) $x = \sqrt{256 + 49} = 17{,}46$ cm

$y = \sqrt{25 + 49} = 8{,}6$ cm

$z = \sqrt{144 + 196} = 18{,}44$ cm

$P = 16 + 28 + 5 + 8{,}6 + 18{,}44 + 12 + 28 + 14 + 17{,}46 = 147{,}5$ cm

061 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide:

a) 10 cm **b) 16 cm** **c) 7 cm**

a) $a = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66$ cm

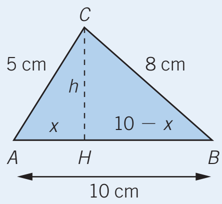
b) $a = \sqrt{256 - 64} = 13{,}86$ cm

c) $a = \sqrt{49 - 12{,}25} = 6{,}06$ cm

062 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.



PRIMERO. Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.

La altura divide a la base del triángulo en dos partes:

AH, cuya longitud llamamos *x*.

HB, cuya longitud será 10 − *x*.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

En $\widehat{AHC}$:

$5^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - x^2$

En $\widehat{HBC}$:

$8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$

TERCERO. Se igualan ambas expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x)$$
$$25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x$$
$$20x = 61 \rightarrow x = 3{,}05 \text{ cm}$$

CUARTO. Se halla el valor de *h*.

$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3{,}05^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

063 ●●

Calcula la altura de un triángulo con lados:

a) $\overline{AB} = 4$ **cm,** $\overline{BC} = 7$ **cm y** $\overline{CA} = 9$ **cm**

b) $\overline{AB} = 6$ **cm,** $\overline{BC} = 10$ **cm y** $\overline{CA} = 14$ **cm**

c) $\overline{AB} = 5$ **cm,** $\overline{BC} = 11$ **cm y** $\overline{CA} = 15$ **cm**

Consideraremos la base como el lado mayor:

a) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 4^2 - x^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \\ \rightarrow 16 - 49 + 81 = 18x \rightarrow x = 2{,}67 \end{array}$$

$$h^2 = 4^2 - x^2 \xrightarrow{x = 2{,}67} h^2 = 16 - 7{,}11 \rightarrow h = 2{,}98 \text{ cm}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 6^2 - x^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \\ \rightarrow 36 - 100 + 196 = 28x \rightarrow x = 4{,}71 \end{array}$$

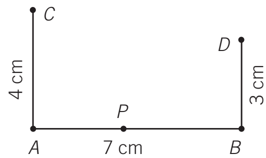
$$h^2 = 6^2 - x^2 \xrightarrow{x = 4{,}71} h^2 = 36 - 22{,}18 \rightarrow h = 3{,}72 \text{ cm}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 5^2 - x^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \\ \rightarrow 25 - 121 + 225 = 30x \rightarrow x = 4{,}3 \end{array}$$

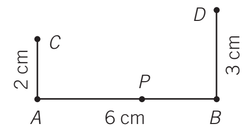
$$h^2 = 5^2 - x^2 \xrightarrow{x = 4{,}3} h^2 = 25 - 18{,}49 \rightarrow h = 2{,}55 \text{ cm}$$

064 Halla la distancia del punto P al punto A, para que se verifique que $\overline{CP} = \overline{DP}$.

a)



b)



a) $\left.\begin{array}{l}\overline{CP}^2 = 16 + \overline{AP}^2\\ \overline{CP}^2 = 9 + (7 - \overline{AP})^2\end{array}\right\} \rightarrow 16 + \overline{AP}^2 = 9 + (7 - \overline{AP})^2$
$\rightarrow 14\overline{AP} = 42 \rightarrow \overline{AP} = 3$ cm

b) $\left.\begin{array}{l}\overline{CP}^2 = 4 + \overline{AP}^2\\ \overline{CP}^2 = 9 + (6 - \overline{AP})^2\end{array}\right\} \rightarrow 4 + \overline{AP}^2 = 9 + (6 - \overline{AP})^2$
$\rightarrow 12\overline{AP} = 41 \rightarrow \overline{AP} = 3{,}42$ cm

065 Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal $\sqrt{116}$ cm.

La altura del rectángulo es: $h = \sqrt{116 - 100} = 4$ cm
El área es: $A = 10 \cdot 4 = 40$ cm^2

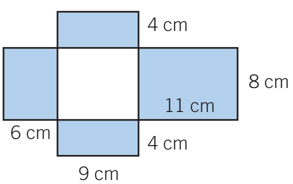
066 Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.

La altura mide: $h = \dfrac{24 - 14}{2} = 5$ cm. El área es: $A = 7 \cdot 5 = 35$ cm^2

067 Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro mide 22,4 cm.

El lado del cuadrado mide: $l = \dfrac{22{,}4}{4} = 5{,}6$ cm. El área es 31,36 cm^2.

068 Calcula el área de la zona coloreada.

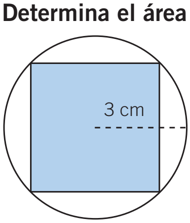


$A = 6 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 8 + 9 \cdot 4 =$
$= 48 + 36 + 88 + 36 = 208$ cm^2

069 Obtén el lado de un cuadrado sabiendo que su área es de 84,64 cm^2.

$l = \sqrt{84{,}64} = 9{,}2$ cm

070 Determina el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.



La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro, por lo que mide 6 cm.

El lado es: $l = \sqrt{\dfrac{36}{2}} = 4{,}24$ cm

El área mide 18 cm^2.

071 ●●

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo *a* el lado de un cuadrado. Razona la respuesta.

a) La diagonal mide $\sqrt{2}\,a^2$.

b) El perímetro es $4a^2$.

c) El área es a^4.

d) El cuadrado de su diagonal es $2a^2$.

a) Falsa: La diagonal es $d = \sqrt{2a^2}$.

b) Falsa: El perímetro es $P = 4a$.

c) Falsa: El área es $A = a^2$.

d) Verdadera

072 ●●

Halla la medida de la diagonal de un cuadrado cuya área es de 12,25 cm².

$$l = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5 \text{ cm} \rightarrow d = \sqrt{2 \cdot 12{,}25} = 4{,}95 \text{ cm}$$

073 ●●●

Encuentra un rectángulo que tenga igual área que un cuadrado de lado 4 cm. Razona cuántos rectángulos cumplen esa condición.

La condición la cumplen todos los rectángulos en los que el producto de sus lados es 16, es decir, $a \cdot b = 16$. Por tanto, las soluciones son infinitas, por ejemplo $a = 2$ cm, $b = 8$ cm.

074 ●

Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden:

a) 4 cm y 12 cm

b) 3 cm y 9 cm

a) $A = \dfrac{4 \cdot 12}{2} = 24 \text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13{,}5 \text{ cm}^2$

075 ●●

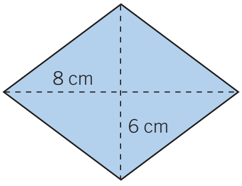
Calcula la medida de una de las diagonales de un rombo de área 30,1 cm², sabiendo que la otra diagonal mide 7 cm.

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \rightarrow D = \frac{2 \cdot A}{d} \rightarrow D = \frac{60{,}2}{7} = 8{,}6 \text{ cm}$$

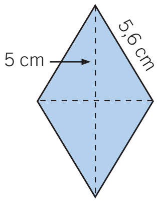
076 ●●

Halla el perímetro y el área de estos rombos.

a)



b)



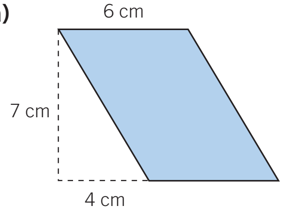
a) $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$ $A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$ $P = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$

b) $D = 10 \text{ cm}$ $d = 2 \cdot \sqrt{5{,}6^2 - 5^2} = 5{,}04 \text{ cm}$

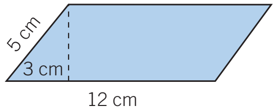
$A = \dfrac{10 \cdot 5{,}04}{2} = 25{,}2 \text{ cm}^2$ $P = 5{,}6 \cdot 4 = 22{,}4 \text{ cm}$

077 **Calcula el área y el perímetro de estas figuras.**

a)



b)



a) $l = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8{,}06$ cm

$A = 7 \cdot 6 = 42$ cm^2

$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8{,}06 = 28{,}12$ cm

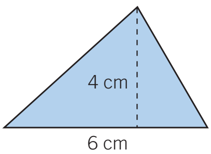
b) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$A = 12 \cdot 4 = 48$ cm^2

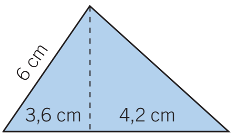
$P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 34$ cm

078 **Halla el área de los siguientes triángulos.**

a)



b)



a) $A = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$ cm^2

b) $h = \sqrt{6^2 - 3{,}6^2} = 4{,}8$ cm

$A = \dfrac{4{,}8 \cdot (3{,}6 + 4{,}2)}{2} = 18{,}72$ cm^2

079 **Determina el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide:**

a) 36 cm **b) 6 dm** **c) 0,153 m**

a) $l = 12$ cm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4} l^2} = 10{,}39$ cm $\quad A = \dfrac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 62{,}34$ cm^2

b) $l = 2$ dm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4} l^2} = 1{,}73$ dm $\quad A = \dfrac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73$ dm^2

c) $l = 51$ cm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4} l^2} = 44{,}17$ cm $\quad A = \dfrac{51 \cdot 44{,}17}{2} = 1126{,}34$ cm^2

080 Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su lado desigual 9 cm.

$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 5{,}36 \text{ cm}$$

$$A = \frac{9 \cdot 5{,}36}{2} = 24{,}12 \text{ cm}^2$$

081 Obtén el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm, y su lado desigual mide cuatro unidades más que los lados iguales.

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = 7{,}14 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14 \cdot 7{,}14}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

082 Calcula la altura y la base de un triángulo rectángulo isósceles, si su área mide:

a) 200 **cm²** | **c)** 450 **dm²**

b) $120{,}125$ **m²** | **d)** $317{,}52$ **mm²**

Consideramos un cateto como base y el otro cateto como altura:

a) $200 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 20$ cm

Hipotenusa $= \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 28{,}28$ cm

Altura $= \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm

b) $120{,}125 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 15{,}5$ m

Hipotenusa $= \sqrt{240{,}25 + 240{,}25} = \sqrt{480{,}5} = 21{,}92$ m

Altura $= \sqrt{240{,}25 - 120{,}125} = \sqrt{120{,}125} = 10{,}96$ m

c) $450 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 30$ dm

Hipotenusa $= \sqrt{900 + 900} = \sqrt{1800} = 42{,}43$ dm

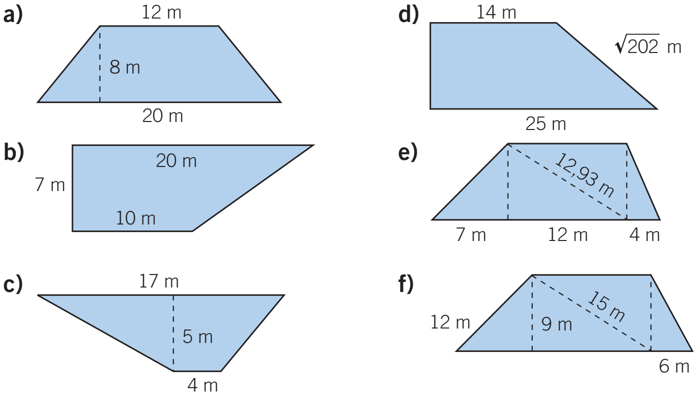
Altura $= \sqrt{900 - 450} = \sqrt{450} = 21{,}21$ dm

d) $317{,}52 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 25{,}2$ mm

Hipotenusa $= \sqrt{635{,}04 + 635{,}04} = \sqrt{1\,270{,}08} = 35{,}64$ mm

Altura $= \sqrt{635{,}04 - 317{,}52} = \sqrt{317{,}52} = 17{,}82$ mm

083 Halla el área de los siguientes trapecios.



a) $A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 8 = 128 \text{ m}^2$

b) $A = \dfrac{20 + 10}{2} \cdot 7 = 105 \text{ m}^2$

c) $A = \dfrac{17 + 4}{2} \cdot 5 = 52{,}5 \text{ m}^2$

d) $h = \sqrt{202 - 121} = 9 \text{ m}$

$A = \dfrac{14 + 25}{2} \cdot 9 = 175{,}5 \text{ m}^2$

e) $h = \sqrt{12{,}93^2 - 12^2} = 4{,}82 \text{ m}$

$A = \dfrac{23 + 12}{2} \cdot 4{,}82 = 84{,}35 \text{ m}^2$

f) $b = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ m}$

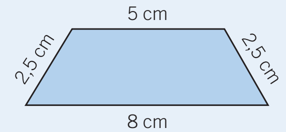
$B = 6 + 12 + \sqrt{12^2 - 9^2} = 25{,}94 \text{ m}$

$A = \dfrac{12 + 25{,}94}{2} \cdot 9 = 170{,}73 \text{ m}^2$

084 **HAZLO ASÍ**

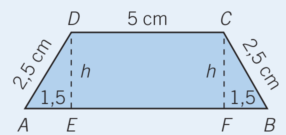
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

Calcula el área de este trapecio isósceles:



PRIMERO. Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

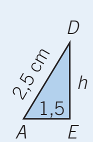
Por ser el trapecio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases miden la mitad de la diferencia de las bases del trapecio.



$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8 - 5}{2} = 1{,}5 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que determina la altura.

$$1{,}5^2 + h^2 = 2{,}5^2$$
$$h^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$$
$$h = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

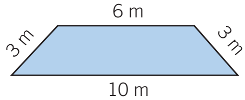


TERCERO. Se calcula el área del trapecio.

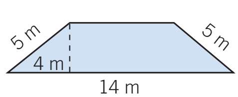
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 5) \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

085 Halla el área de estos trapecios isósceles.

a)



b)



a) $h = \sqrt{3^2 - 2^2} = 2{,}24$ m

$$A = \frac{10 + 6}{2} \cdot 2{,}24 = 17{,}92 \text{ m}^2$$

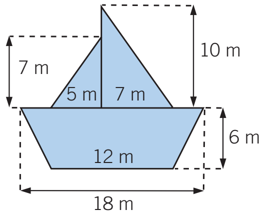
b) $d = 14 - 4 - 4 = 6$ m

$h = \sqrt{25 - 16} = 3$ m

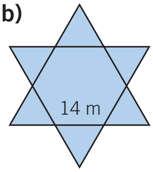
$$A = \frac{14 + 6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ m}^2$$

086 Calcula el área de las siguientes figuras.

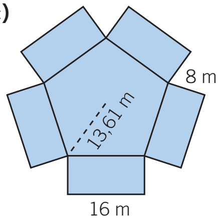
a)



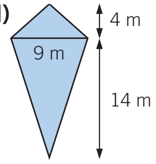
b)



c)



d)



a) $A = A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{5 \cdot 7}{2} + \dfrac{7 \cdot 10}{2} + \dfrac{18 + 12}{2} \cdot 6 =$

$= 17{,}5 + 35 + 84 = 126{,}5 \text{ m}^2$

b) $\text{Apotema} = \sqrt{\dfrac{3}{4} \cdot 14^2} = 12{,}12$ m

$$A_h = \frac{84 \cdot 12{,}12}{2} = 509{,}04 \text{ m}^2$$

$$A_t = \frac{12{,}12 \cdot 14}{2} = 84{,}84 \text{ m}^2$$

$A = A_h + 6 \cdot A_t = 509{,}04 + 509{,}04 = 1\,018{,}08 \text{ m}^2$

c) $\text{Apotema} = \sqrt{13{,}61^2 - 8^2} = 11{,}01$ m

$$A_p = \frac{80 \cdot 11{,}01}{2} = 440{,}4 \text{ m}^2$$

$A_r = 16 \cdot 8 = 128 \text{ m}^2$

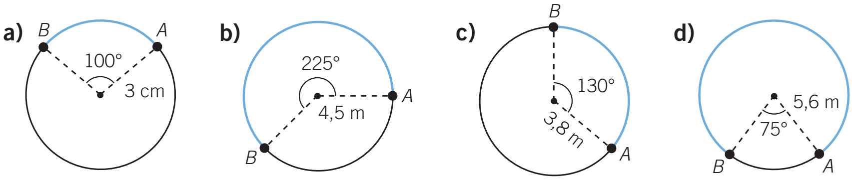
$A = A_p + 5 \cdot A_r = 440{,}4 + 640 = 1\,080{,}4 \text{ m}^2$

d) $A = \dfrac{(14 + 4) \cdot 9}{2} = 81 \text{ m}^2$

087 Copia y completa la siguiente tabla con los datos que faltan.

Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
2 cm	4 cm	12,56 cm
3,5 cm	**7 cm**	21,98 cm
4,7 cm	9,4 cm	**29,516 cm**
5 cm	**10 cm**	31,4 cm
6,3 cm	12,6 cm	39,56 cm
7,8 cm	15,6 cm	**48,984 cm**

088 Calcula la longitud del arco marcado en rojo.



a) $L = \dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 100}{360} = 5{,}23$ cm

b) $L = \dfrac{2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 225}{360} = 17{,}66$ cm

c) $L = \dfrac{2\pi \cdot 3{,}8 \cdot 130}{360} = 8{,}62$ cm

d) $L = \dfrac{2\pi \cdot 5{,}6 \cdot 75}{360} = 7{,}33$ cm

089 ¿Cuál es el diámetro de una circunferencia de longitud 50,24 cm?

$$d = \frac{50{,}24}{\pi} = 16 \text{ cm}$$

090 Halla el diámetro de una circunferencia, sabiendo que la longitud de un arco de 50° es de 5,23 cm.

$$5{,}23 = \frac{d \cdot \pi \cdot 50}{360} \rightarrow d = 12 \text{ cm}$$

091 ¿Cuál es la longitud de una circunferencia cuya longitud de un arco de 110° es de 57,57 cm?

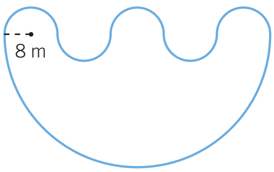
$$L = \frac{57{,}57 \cdot 360}{110} = 188{,}41 \text{ cm}$$

092 Copia y completa la tabla.

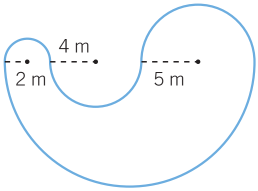
Longitud de arco de 60°	Longitud de arco de 85°	Longitud de arco de 190°	Longitud de la circunferencia
9,42 cm	13,35 cm	29,83 cm	56,52 cm
12,56 cm	**17,79 cm**	39,77 cm	75,36 cm
4,19 cm	5,93 cm	**13,26 cm**	25,12 cm

093 Determina el perímetro de estas figuras.

a)



b)



a) $r = 8$ m $\quad R = 8 \cdot 5 = 40$ m $\quad L = 40\pi + 5 \cdot 8\pi = 251{,}2$ m

b) $R = \dfrac{4 + 8 + 10}{2} = 11$ m $\quad L = 11\pi + 2\pi + 4\pi + 5\pi = 69{,}08$ m

094 Calcula el área de un círculo con:

a) Radio de 6 cm. b) Diámetro de 6 cm. c) Radio de 7,2 cm.

a) $A = 36\pi = 113{,}04$ cm^2

b) $A = 9\pi = 28{,}26$ cm^2

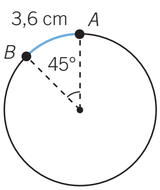
c) $A = 51{,}84\pi = 162{,}78$ cm^2

095 Halla el área de un círculo delimitado por una circunferencia de 321,4 cm.

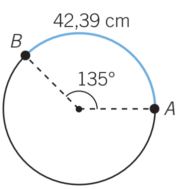
$r = \dfrac{321{,}4}{2\pi} = 51{,}18$ cm $\quad A = \pi \cdot 51{,}18^2 = 8\,224{,}89$ cm^2

096 Calcula el área de los círculos con estas longitudes de arco.

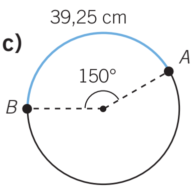
a)



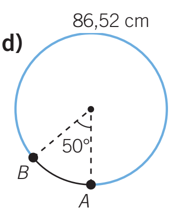
b)



c)



d)



a) $3{,}6 = \dfrac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 4{,}59$ cm

$A = \pi \cdot 21{,}07 = 66{,}16$ cm^2

b) $42{,}39 = \dfrac{2\pi r \cdot 135}{360} \rightarrow r = 18$ cm

$A = \pi \cdot 324 = 1\,017{,}36$ cm^2

c) $39{,}25 = \dfrac{2\pi r \cdot 150}{360} \rightarrow r = 15$ cm

$A = \pi \cdot 225 = 706{,}5$ cm^2

d) $86{,}52 = \dfrac{2\pi r \cdot 310}{360} \rightarrow r = 16$ cm

$A = \pi \cdot 256 = 803{,}84$ cm^2

097 Halla el área de estos sectores circulares.

a) $A = \dfrac{\pi \cdot 13^2 \cdot 85}{360} = 125{,}29\ \text{cm}^2$

b) $A = \dfrac{\pi \cdot 6{,}8^2 \cdot 240}{360} = 96{,}8\ \text{m}^2$

098 Determina el área de los sectores coloreados.

a) $6{,}28 = \dfrac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 8\ \text{m}$

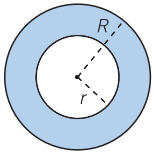
$A = \dfrac{\pi \cdot 64 \cdot 45}{360} = 25{,}12\ \text{m}^2$

b) $4 = \dfrac{2\pi r \cdot 115}{360} \rightarrow r = 2\ \text{m}$

$A = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 130}{360} = 4{,}54\ \text{m}^2$

099 Halla el área de la zona sombreada si:

a) $R = 10$ m y $r = 6$ m
b) $R = 12{,}6$ cm y $r = 5$ cm
c) $R = 3r$ y $r = 2{,}4$ cm
d) $R + r = 31$ m y $R - r = 5$ m



a) $A = \pi \cdot (100 - 36) = 200{,}96\ \text{m}^2$

b) $A = \pi \cdot (158{,}76 - 25) = 420\ \text{cm}^2$

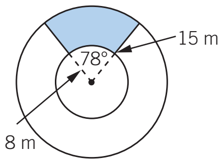
c) $A = \pi \cdot (51{,}84 - 5{,}76) = 164{,}69\ \text{cm}^2$

d) $\left.\begin{array}{l} R + r = 31\ \text{m} \\ R - r = 5\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow R = 18\ \text{m} \rightarrow r = 13\ \text{m}$

$A = \pi \cdot (324 - 169) = 486{,}7\ \text{m}^2$

100 Calcula el área coloreada de estas figuras.

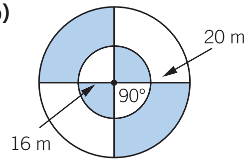
a)



$A_{\text{Corona}} = \pi \cdot (225 - 64) = 505{,}54\ \text{m}^2$

$A_{\text{Sector}} = \dfrac{505{,}54 \cdot 78}{360} = 109{,}53\ \text{m}^2$

b)

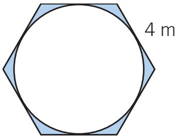


El área coloreada es la mitad de la corona exterior más la mitad del círculo interior. Por tanto, el área es la mitad del círculo mayor.

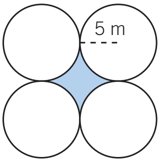
$$A = \frac{\pi \cdot 36^2}{2} = 2\,034{,}72 \text{ m}^2$$

101 **Obtén el área de la zona coloreada.**

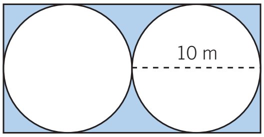
a)



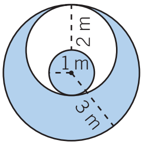
c)



b)



d)



a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ m

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot 3{,}46^2 = 37{,}59 \text{ m}^2$$

$$A = A_{\text{Hexágono}} - A_{\text{Círculo}} = 41{,}52 - 37{,}59 = 3{,}93 \text{ m}^2$$

b) $A = A_{\text{Rectángulo}} - 2 \cdot A_{\text{Círculo}} = 20 \cdot 10 - 2\pi \cdot 5^2 = 200 - 157 = 43 \text{ m}^2$

c) $A = A_{\text{Cuadrado}} - 4 \cdot \dfrac{A_{\text{Círculo}}}{4} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \text{ m}^2$

d) $A = A_3 - A_2 + A_1 = \pi \cdot 9 - \pi \cdot 4 + \pi \cdot 1 = 18{,}84 \text{ m}^2$

102 **Considerando que los polígonos son regulares, copia y completa la tabla.**

N.º de lados	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
Suma de ángulos	180°	**360°**	540°	720°	900°	…
Ángulo interior	60°	$\frac{360°}{4} = 90°$	108°	120°	128,6°	…

a) ¿Cuál es el polígono con menor ángulo?
b) ¿Y el que tiene el mayor ángulo?

a) El polígono con menor ángulo interior es el triángulo.

b) El polígono con mayor ángulo interior es el que tiene mayor número de lados, y cuando es infinito, es la circunferencia.

103 **Calcula la suma de los ángulos de un polígono de 3, 4, 5 y 6 lados.**

a) ¿Qué diferencia hay entre la suma de cada polígono y la del polígono con un lado menos?

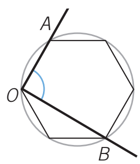
b) Si la suma de los ángulos de un polígono de 15 lados es 2 340°, ¿cuál será la suma de uno de 16 lados?

a) La diferencia es siempre 180°.

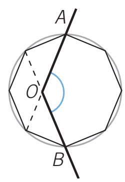
b) La suma es: $2340 + 180 = 2520°$

104 **Calcula el valor de los ángulos marcados.**

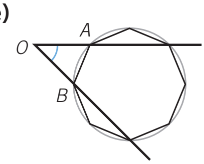
a)



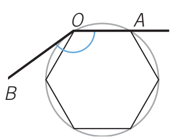
c)



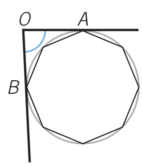
e)



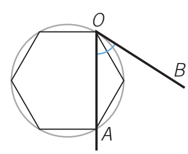
b)



d)



f)



a) Inscrito: $180 : 2 = 90°$

b) Semiinscrito: $300 : 2 = 150°$

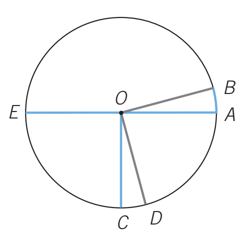
c) Interior: $(180 + 90) : 2 = 135°$

d) Circunscrito: $(270 - 90) : 2 = 90°$

e) Exterior: $(135 - 45) : 2 = 45°$

f) Semiinscrito: $120 : 2 = 60°$

105 **Si el arco $\widehat{AB} = 15° \, 20'$, calcula el valor de los arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{AD}$ y $\widehat{BE}$.**



$\widehat{BC} = 90° - 15° \, 20' = 74° \, 40'$

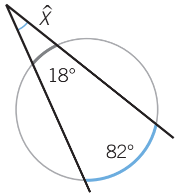
$\widehat{CD} = \widehat{AB} = 15° \, 20'$

$\widehat{AD} = 90° + 15° \, 20' = 105° \, 20'$

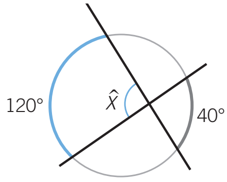
$\widehat{BE} = 180° + 15° \, 20' = 195° \, 20'$

106 Calcula el valor del ángulo $\hat{X}$.

a)



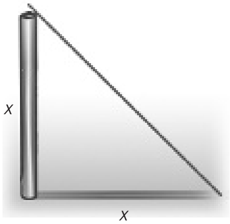
b)



a) Exterior: $(82 - 18) : 2 = 32°$

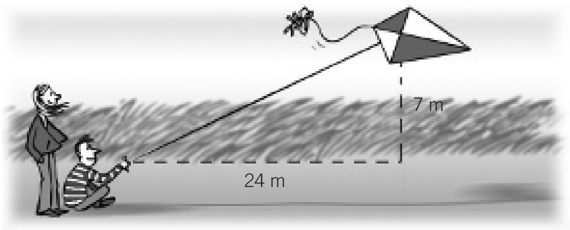
b) Interior: $(120 + 40) : 2 = 80°$

107 La sombra que produce una varilla vertical en un instante es igual a su longitud. ¿Qué triángulo determinan la varilla y su sombra? ¿Cuál es la inclinación de los rayos solares?



La varilla y su sombra determinan un triángulo rectángulo e isósceles. Los rayos del sol tienen una inclinación de 45°.

108 Calcula la longitud del cable de la cometa.

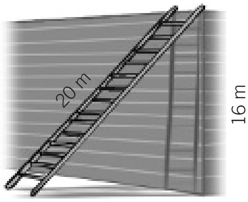


$l = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ m El cable mide 25 m.

109 ¿Cuál es la longitud máxima que Juan puede nadar en una piscina que mide 17 m de largo y 10 m de ancho, si solo puede hacerlo en línea recta?

La longitud máxima es la diagonal: $d = \sqrt{17^2 + 10^2} = 19{,}72$ m

110 **Sobre una pared vertical de 16 m de altura se coloca inclinada una escalera de 20 m de longitud. ¿A qué distancia de la pared se encuentra la base de la escalera?**



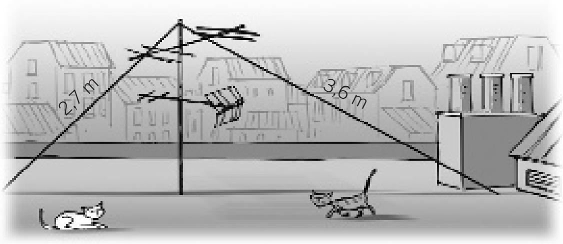
$d = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ m

Se encuentra a 12 m.

111 **Una escalera mide 2,5 m de longitud y, al apoyarse en la pared, su base dista de ella 0,7 m. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?**

$h = \sqrt{2{,}5^2 - 0{,}7^2} = 2{,}4$ m   Llega a una altura de 2,4 m.

112 **Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 2,7 m y 3,6 m. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de unión de los cables con el suelo?**



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman los cables:

$d = \sqrt{2{,}7^2 + 3{,}6^2} = 4{,}5$ m

113 **Ana tiene un jardín rectangular, de 500 m de largo y 300 m de ancho, y quiere hacer una piscina de forma circular de 100 m de radio. ¿Cuánto terreno le queda para plantar césped?**

El terreno para plantar césped es el área de la parcela menos el área de la piscina:

$A = 500 \cdot 300 - \pi \cdot 100^2 = 150\,000 - 31\,400 = 118\,600$ m^2

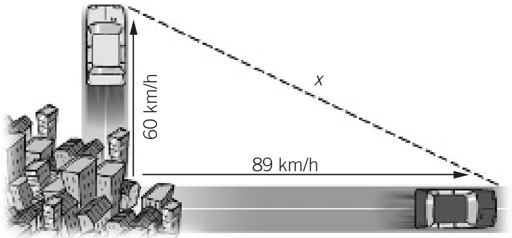
114 **La rueda de un camión mide 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 1 000 vueltas? ¿Y cuántas vueltas dará para recorrer 2 km?**

La longitud de la rueda es: $L = 2\pi \cdot 90 = 565{,}2$ cm

En 1 000 vueltas, el camión avanzará: $1\,000 \cdot 565{,}2 = 565\,200$ m

Para recorrer 2 000 m, la rueda dará: $\dfrac{2\,000}{565{,}2} = 3{,}54$ vueltas

115 **Dos coches parten de una ciudad a la vez y en direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 60 km/h y el segundo de 89 km/h. ¿Qué distancia las separa al cabo de 1 hora y cuarto?**



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman las carreteras.

Así, la distancia recorrida por el primer coche es 75 km y la del segundo es 111,25 km.

La distancia que los separa es: $x = \sqrt{75^2 + 111{,}25^2} = 134{,}17$ km

116 **Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 600 km/h y el segundo de 800 km/h.**

a) ¿Qué distancia las separa al cabo de 2 horas?

b) Si el alcance de su radio es de 500 km, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de media hora?

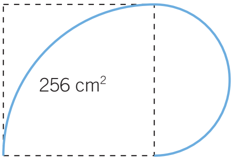
a) Al cabo de 2 horas, el primer avión ha recorrido 1 200 km, y el segundo, 1 600 km, por lo que la distancia que los separa es:

$d = \sqrt{1\,200^2 + 1\,600^2} = 2\,000$ km

b) Al cabo de media hora, el primer avión ha recorrido 300 km, y el segundo, 400 km, por lo que la distancia que los separa es:

$d = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ km y están en el límite del alcance de la radio.

117 **Uno de los adornos de metal de una reja tiene esta forma.**



Calcula la longitud del adorno sabiendo que el área del cuadrado es de 256 cm^2.

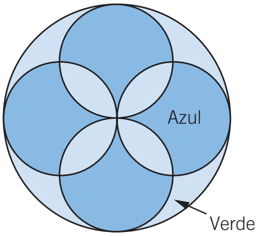
El lado del cuadrado es: $l = \sqrt{256} = 16$ cm

La longitud de la primera porción de reja es: $L_1 = \dfrac{2\pi \cdot 16}{4} = 25{,}12$ cm

La longitud de la segunda porción es: $L_2 = \dfrac{2\pi \cdot 8}{2} = 25{,}12$ cm

La longitud de la reja es: $2 \cdot 25{,}12 = 50{,}24$ cm

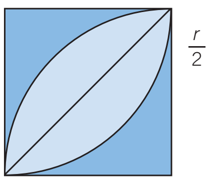
118 ●●● **Si se han empleado 400 cm² de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios para realizar esta vidriera?**



Área del círculo mayor: $\pi \cdot r^2$

Área de los círculos menores: $\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

Área de los pétalos:



$$A_{\text{Pétalo}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8}$$

$$A_{\text{Verde}} = A_{\text{Círculo}} - 4 \cdot A_{\text{Menores}} + 4 \cdot A_{\text{Pétalo}}$$

$$400 = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} + 4 \cdot \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{2}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{800}{\pi - 1}} = 19{,}33 \text{ cm}$$

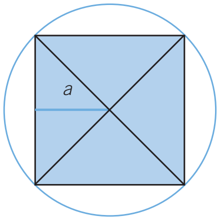
$$A_{\text{Azul}} = \pi \cdot 19{,}33^2 - 400 = 773{,}26 \text{ cm}^2$$

119 ●●● **Si dos polígonos tienen igual área, ¿pueden tener perímetros diferentes?**

Pueden tener perímetros diferentes, ya que no existe una correspondencia entre perímetro y área, salvo si son polígonos semejantes.

120 ●●● **Comprueba que, aplicando la fórmula para hallar el área de un polígono regular al triángulo equilátero y al cuadrado, obtenemos las fórmulas del área de un triángulo y de un cuadrado.**

Cuadrado:

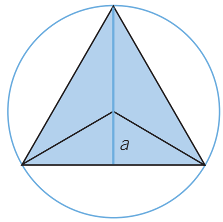


$a = \frac{l}{2}$

Perímetro $= 4l$

$$A = \frac{4l \cdot \frac{l}{2}}{2} = l^2$$

Triángulo equilátero:



Por ser un triángulo equilátero, la apotema es la mitad del radio:

$$a = \frac{r}{2}$$

$$\text{Altura} = r + a = \frac{3r}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot b \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{l \cdot \frac{3r}{2}}{2} = \frac{b \cdot \text{altura}}{2}$$

121 ●●● **Sabiendo que *a*, *b* y *c* son los lados de un triángulo rectángulo, comprueba si son rectángulos los triángulos de lados:**

a) $2a$, $2b$ **y** $2c$

b) $a + 5$, $b + 5$ **y** $c + 5$

c) $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ **y** $\frac{c}{3}$

d) $2a$, $3b$ **y** $4c$

¿Puedes extraer una regla general?

Dado un triángulo rectángulo de lados *a*, *b* y *c*, ¿cómo podrías obtener otros triángulos rectángulos?

Consideramos que $a^2 = b^2 + c^2$:

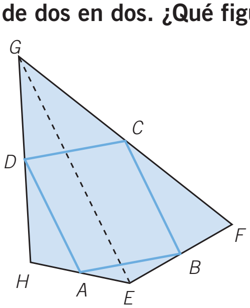
a) $(2b)^2 + (2c)^2 = 4 \cdot (b^2 + c^2) = 4 \cdot a^2 = (2a)^2 \rightarrow$ Es rectángulo.

b) $(b + 5)^2 + (c + 5)^2 = b^2 + 10b + 25 + c^2 + 10c + 25 =$
$= b^2 + c^2 + + 10b + 10c + 50$
$= a^2 + 10a + 50 \neq (a + 5)^2 \rightarrow$ No es equilátero.

c) $\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot (b^2 + c^2) = \frac{1}{9} \cdot a^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 \rightarrow$ Es rectángulo.

d) $(3b)^2 + (4c)^2 = 9 \cdot (b^2 + c^2) + 7c^2 = 9 \cdot a^2 + 7c^2 =$
$= (3a)^2 + 7c^2 \neq (2a)^2 \rightarrow$ No es equilátero.

122 ●●● **En un cuadrilátero cualquiera, señala los puntos medios de sus lados y únelos de dos en dos. ¿Qué figura se forma? Investiga si se cumple siempre.**



Consideramos el cuadrilátero y sus diagonales:

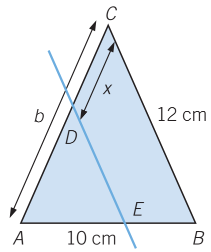
El triángulo $\widehat{EFG}$ está en posición de Tales con $\widehat{BFC}$, por lo que CB es paralelo a EG.

El triángulo $\widehat{HEG}$ está en posición de Tales con $\widehat{HAD}$, por lo que AD es paralelo a EG.

Tenemos que AD es paralelo a CB y AB es paralelo a CD.

Por tanto, siempre se forma un paralelogramo.

123 La recta DE es paralela al lado BC.



a) **Halla lo que miden los segmentos BE y DE en función de b y x.**

b) **Determina b y x para que $\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD}$ y $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \dfrac{5}{11}$.**

a) Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AED}$ son semejantes.

$$\frac{\overline{BE}}{x} = \frac{10}{b} \rightarrow \overline{BE} = \frac{10x}{b}$$

$$\frac{12}{\overline{DE}} = \frac{b}{b - x} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot (b - x)}{b}$$

b) La primera igualdad significa que:

$$\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD} \rightarrow \frac{12 \cdot (b - x)}{b} = \frac{10x}{b} + x$$

y la segunda:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{x}{b} = \frac{5}{11}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12 \cdot (b - x)}{b} &= \frac{10x}{b} + x \\ \frac{x}{b} &= \frac{5}{11} \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{5b}{11}$$

$$\frac{12 \cdot (b - x)}{b} = \frac{10x}{b} + x \xrightarrow{x = \frac{5b}{11}} \frac{12 \cdot \left(\frac{6b}{11}\right)}{b} = \frac{\frac{50b}{11}}{b} + \frac{5b}{11}$$

$$\rightarrow \frac{72}{11} = \frac{50}{11} + \frac{5b}{11} \rightarrow 22 = 5b \rightarrow b = \frac{22}{5} = 4{,}4 \text{ cm}$$

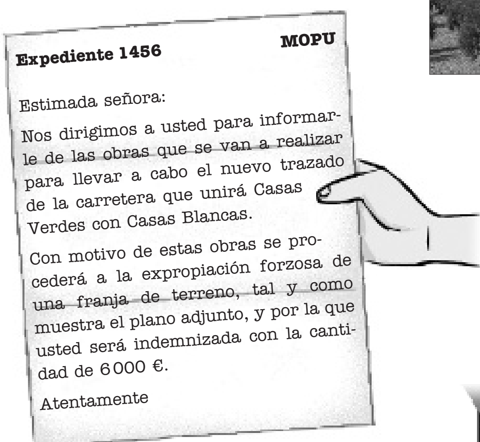
$$x = \frac{5b}{11} \xrightarrow{b = \frac{22}{5}} x = 2$$

Es decir, $b = 4{,}4$ cm y $x = 2$ cm.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

124 ●●●

Se está diseñando un nuevo trazado para la carretera que une dos localidades, pero este trazado pasará por los olivares, con lo que muchas familias se verán afectadas.



Expediente 1456 MOPU

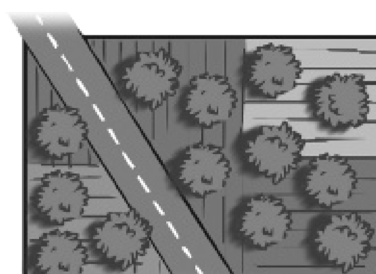
Estimada señora:

Nos dirigimos a usted para informarle de las obras que se van a realizar para llevar a cabo el nuevo trazado de la carretera que unirá Casas Verdes con Casas Blancas.

Con motivo de estas obras se procederá a la expropiación forzosa de una franja de terreno, tal y como muestra el plano adjunto, y por la que usted será indemnizada con la cantidad de 6000 €.

Atentamente

La familia de Lidia, al igual que otras familias del pueblo, ya ha recibido la notificación.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Según las escrituras, su terreno tiene una superficie de 6 hectáreas. ¿Cuánto mide de largo? ¿Y de ancho?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Cuánto les van a pagar por cada metro cuadrado expropiado?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) El abogado al que han consultado dice que reclamando pueden recibir hasta 20 € por cada metro cuadrado expropiado. Si los costes judiciales son de 5000 €, ¿crees que les conviene reclamar?

a) El área del terreno es: $6 \text{ ha} = 60\,000 \text{ m}^2 = (90 + 15 + 195) \cdot \text{Ancho}$

$$60\,000 = 300 \cdot \text{Ancho} \rightarrow \text{Ancho} = 200 \text{ m}$$

Las dimensiones del terreno son: $\text{Largo} = 90 + 15 + 195 = 300 \text{ m}$
$\text{Ancho} = 200 \text{ m}$

b) La carretera es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 90 m y 200 m.

$$L_{\text{Carretera}} = \sqrt{90^2 + 200^2} = 219{,}32 \text{ m}$$

El área de la carretera será: $A_{\text{Carretera}} = 15 \cdot 219{,}32 = 3\,289{,}8 \text{ m}^2$

Por cada m^2 expropiado les pagan: $6000 : 3\,289{,}8 = 1{,}82 \text{ €/m}^2$

c) Si el precio son 20 €/m^2, recibirán: $20 \cdot 3289{,}8 = 65796$ €

Como los costes son 5000 €, recibirán:

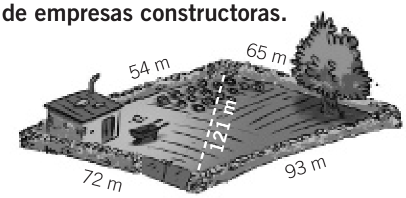
$65796 - 5000 = 60796$ €

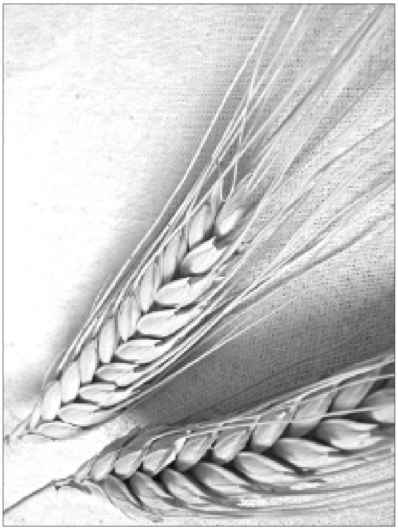
Si no reclaman recibirán 6000 €, si reclaman pueden llegar a más de 60000 €. Les conviene reclamar.

125 ●●●

Tras la última reunión sobre urbanismo del ayuntamiento de una localidad, se ha decidido declarar urbanizable uno de los terrenos en los que Goro ha sembrado cereales.

Goro se ha enterado de la noticia y ha buscado los planos del terreno para estudiarlos ante posibles ofertas por parte de empresas constructoras.





ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Dibuja un gráfico que represente los triángulos que se forman en el terreno y sus medidas.

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

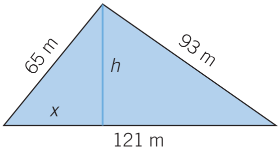
b) ¿Cuál es la superficie del terreno?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) A los pocos días, Goro ha recibido una oferta de una empresa constructora.
¿Es cierto lo que afirma el constructor?

a) Consideramos los dos triángulos que se forman con la diagonal:

b)

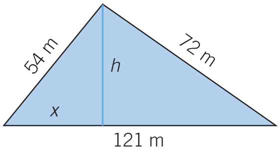


$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 65^2 - x^2 \\ h^2 = 93^2 - (121 - x)^2 \end{array}\right\}$$

$65^2 - x^2 = 93^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 4\,225 - 8\,649 + 14\,641 = 242x$
$\rightarrow x = 42{,}22$ m

$h^2 = 65^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,42{,}22} h^2 = 4\,225 - 1\,782{,}53 \rightarrow h = 49{,}42$ m

$$A_1 = \frac{121 \cdot 49{,}42}{2} = 2\,989{,}91 \text{ m}^2$$



$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 54^2 - x^2 \\ h^2 = 72^2 - (121 - x)^2 \end{array}\right\}$$

$54^2 - x^2 = 72^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 2\,916 - 5\,184 + 14\,641 = 242x$
$\rightarrow x = 51{,}13$ m

$h^2 = 54^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,51{,}13} h^2 = 2\,916 - 2\,614{,}28 \rightarrow h = 17{,}37$ m

$$A_2 = \frac{121 \cdot 17{,}37}{2} = 1\,050{,}88 \text{ m}^2$$

El área total es: $2\,989{,}91 + 1\,050{,}88 = 4\,040{,}79$ m^2

c) Si le pagan 325 000 €, por cada metro cuadrado recibirá:

$325\,000 : 4\,040{,}79 = 80{,}43$ €

No es cierto lo que le dice el constructor, el metro se lo pagan a casi el 20 % menos.