

15

Azar y probabilidad




Las nociones de azar y de probabilidad vienen desde antiguo y siempre relacionadas con los juegos. ¿Te suena la frase *Alea jacta est*? La pronunció Julio César en el siglo I a.C., y significa “La suerte está echada”. La palabra *alea* en latín significa “suerte” y también “dado”. *Alea* da lugar a la palabra castellana “aleatorio”, relativo al azar.



En las antiguas civilizaciones babilonia y egipcia se jugaba a las tabas. Una taba es un hueso del talón de una oveja (el astrágalo) que, al lanzarlo, puede caer en cuatro posiciones. Las tabas dieron origen a los dados, y tanto en Grecia como en la Roma imperial se practicaban ambos juegos, las tabas y los dados.

En el siglo XVI, el italiano **Cardano** (gran matemático y gran jugador) escribió un libro sobre los juegos de azar en el que, además de consejos para hacer fulleras y evitar que te las hicieran, teorizaba sobre el comportamiento del azar. Fue la primera vez que se trató el azar de forma científica.

Pero el origen de la teoría de la probabilidad se suele situar en 1654, cuando un jugador profesional, el caballero de Meré, propuso a su amigo **Pascal** algunos problemas de probabilidad relacionados con juegos. Este pensó en ellos y se los comunicó, por carta, a otro matemático, **Fermat**. Compartiendo sus conclusiones le fueron dando forma y sistematizaron el cálculo de probabilidades. 

Nombre y apellidos: Fecha:

1 Sucesos aleatorios

¿Dependen del azar?

¿Encestar un balón depende del azar?
Pues sí, por bueno que sea el jugador, siempre hay algo de suerte en el resultado.

¿Y la nota de un examen?

Bien lo sabes, por mucho que se haya estudiado, siempre hay un punto de suerte.

Los resultados de las siguientes experiencias dependen del azar:

- Echar un dado sobre la mesa.
- Lanzar un balón a canasta.
- Comprobar si lloverá a lo largo del día.
- Realizar un examen y ver qué nota se saca.

Estos acontecimientos que dependen del azar se llaman *sucesos aleatorios*.

Para analizar cómo se comporta el azar, podemos realizar *experiencias aleatorias*; es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo:

- Lanzar una moneda.
- Lanzar tres monedas y observar cuántas caras salen.



- Arrojar un dado y anotar el número que sale.
- En qué color para la aguja en esta ruleta.



- ¿Lloverá mañana?
- ¿Cuántos días lloverá la próxima semana?



- **Suceso aleatorio** es un acontecimiento en cuya realización influye el azar.
- **Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado depende del azar.

Piensa y practica

1. En cada una de las experiencias descritas arriba, di cuáles son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

Por ejemplo:

a) Lanzar una moneda: **C** y **+**

b) ¿Cuántas caras al lanzar tres monedas? **0, 1, 2, 3**

Sigue tú:

c) Resultado al lanzar un dado.

d) Color del sector que señala la flecha en la ruleta de colores.

e) ¿Lloverá mañana?

f) ¿Cuántos días lloverá la semana que viene?

Espacio muestral

Cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso**.

La experiencia aleatoria “tirar una moneda” consta de dos casos: C y +.

El “número de caras al tirar 3 monedas” tiene 4 casos: 0, 1, 2 y 3.

En el “lanzamiento de un dado normal”, los casos son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

El conjunto de todos los casos de una experiencia aleatoria se llama **espacio muestral**. Se suele designar con la letra *E*.

“Lanzamiento de una moneda” $\rightarrow E = \{C, +\}$

“Número de caras al tirar 3 monedas” $\rightarrow E = \{0, 1, 2, 3\}$

“Lanzamiento de un dado normal” $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Un **suceso** es un subconjunto extraído del espacio muestral.

Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos individuales**.

El propio espacio muestral es el suceso total o **suceso seguro**.

Por ejemplo, al lanzar un dado podemos considerar, entre otros, los siguientes sucesos:

$$\text{PAR} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{IMPAR} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{MENOR QUE 3} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\text{MAYOR QUE 5} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\}$$

Ejercicio resuelto

En la experiencia de la ruleta, decir cuál es el espacio muestral y decir algunos sucesos.



La flecha puede caer en rojo (R), azul (Az), amarillo (Am) o verde (V). Esos son los casos en esta experiencia.

El espacio muestral es: $E = \{R, Az, Am, V\}$

Algunos sucesos:

— Ni ROJO ni AZUL = $\{V, Am\}$

— No AMARILLO = $\{R, Az, V\}$

— Colores de la bandera de España = $\{R, Am\}$

— El suceso seguro es $E = \{R, Az, Am, V\}$.

Piensa y practica

2. En una caja echamos 10 fichas numeradas:



La experiencia consiste en extraer, al azar, una ficha y anotar el número obtenido.

a) ¿Cuáles son los casos?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Escribe los siguientes sucesos:

— “Mayor que 1”

— “Impar”

— “Par”

— Suceso seguro

El azar no es tan caprichoso como parece. Los sucesos que dependen del azar (sucesos aleatorios) ocurren con mayor o menor facilidad, es decir, con mayor o menor probabilidad. Y esta probabilidad se puede medir.

La **probabilidad de un suceso aleatorio** es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

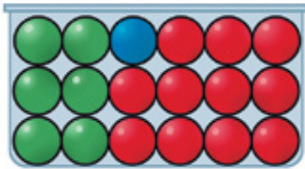
Para designar la probabilidad de un suceso, S , ponemos $P[S]$.

- Si $P[S]$ es **próxima a cero**, el suceso es **poco probable**.
- Si $P[S]$ es **próxima a uno**, el suceso es **muy probable**.

Cuando decimos que la probabilidad de un suceso S es $1/2$, $P[S] = 1/2$, queremos decir que, por término medio, ocurre la mitad de las veces que se realiza la experiencia.

Por ejemplo, si extraemos al azar una bola de la urna del margen, podemos decir...

- ... que la bola sea roja es muy probable.
- ... que la bola sea azul es muy poco probable.
- ... que la bola sea amarilla es imposible (en este caso, la probabilidad es 0).
- ... que la bola sea esférica es seguro (en este caso, la probabilidad es 1).



Ejercicio resuelto

Indicar con IMPOSIBLE, POCO PROBABLE, MUY PROBABLE o SEGURO lo que corresponda en cada uno de los siguientes sucesos:

- Sacar el as de copas de una baraja.
- Obtener un número mayor que uno al lanzar un dado.
- Obtener cara o cruz al tirar una moneda.
- Que te salga un 0 en el dado.

- Al extraer una carta de una baraja, es POCO PROBABLE sacar el as de copas, ya que hay muchas cartas y solo una de ellas es el as de copas.
- Si lanzas un dado, puedes obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por tanto, es MUY PROBABLE que salga un número mayor que 1; es decir, 2, 3, 4, 5 o 6.
- Si tiras una moneda, sale cara o cruz; por tanto, es SEGURO que sale una de las dos.
- Ya sabemos que en un dado nunca puede salir un 0; por tanto, el suceso es IMPOSIBLE.

Piensa y practica

- En la ruleta de la derecha, hacemos girar la flecha y nos fijamos en qué color señala.



Responde a las probabilidades pedidas con las palabras SEGURO, MUY PROBABLE, POCO PROBABLE o IMPOSIBLE:

- ¿Cómo de probable es sacar rojo? ¿Y azul?
- ¿Cómo de probable es que no sea amarillo?
- ¿Cómo de probable es sacar verde?

Medir probabilidades

- Las dos caras de la moneda tienen la misma probabilidad de salir.





- Ignoramos cuál es la probabilidad de cada una de estas dos posiciones. Solo podemos averiguarlas experimentando.



Dos formas de medir la probabilidad

Al lanzar una moneda, sabemos que, por ser igual por ambos lados, es igual de probable que ocurra CARA que CRUZ. Por eso, podemos asignar probabilidades sin necesidad de experimentar, y decimos que:



$$P[C] = \frac{1}{2} \qquad P[+] = \frac{1}{2}$$



Sin embargo, si se trata de una chincheta, desconocemos cómo de probable es que caiga así  o así . ¿Cómo evaluar la probabilidad de estas dos posturas? Es imposible hacerlo si no experimentamos. Es decir, solo la experiencia nos puede informar sobre la probabilidad de que la chincheta caiga de un modo u otro.

Hay dos formas de medir la probabilidad de un suceso:

- Si la **experiencia** es **regular**, como en el caso de la moneda, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará asignando la misma probabilidad a todos los casos que puedan darse.
- Si la **experiencia** es **irregular**, para asignar probabilidades es necesario experimentar.

Asignación de probabilidades en experiencias irregulares

- Para asignar probabilidades a las dos posiciones en que puede caer una chincheta,  y , solo podemos proceder mediante experimentación: la lanzamos muchas veces y obtenemos la frecuencia relativa de cada caso.

Supongamos que la hemos lanzado 100 veces obteniendo 21  y 79 . Diremos que:

$$P[\text{heads}] \approx \frac{21}{100} = 0,21 \qquad P[\text{tails}] \approx \frac{79}{100} = 0,79$$

Los resultados solo son aproximados. Si queremos que la estimación sea mejor, debemos aumentar el número de experiencias.

- Probabilidad de “tener un accidente”. Aquí no se puede experimentar, pero sí observar, recoger datos y, así, obtener frecuencias relativas. Es lo que hacen las compañías de seguros.

Por ejemplo, si de un total de 87 540 asegurados ha habido 2 123 que han tenido un accidente este año, la compañía deduce que:

$$P[\text{ACCIDENTE}] \approx \frac{2123}{87540} = 0,024$$

Piensa y practica

- Explica por qué se puede asignar probabilidades a las seis caras de un dado correcto sin necesidad de probarlo.



- Explica por qué es indispensable experimentar para conocer la probabilidad de cada una de las cuatro caras de la taba.



Si lanzamos un dado perfecto, todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Por tanto, esperamos que cada una de ellas salga, por término medio, *una de cada seis veces*. Esto se expresa diciendo que su probabilidad es $\frac{1}{6}$.

Espacio muestral = $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right\}$

Si el dado es perfecto:

$$P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}; P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}; \dots; P\left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}\right] = \frac{1}{6}$$

¿Y si el dado es imperfecto?

Como hemos visto en la página anterior, si el dado es irregular, solo experimentando podremos averiguar algo de las probabilidades de sus caras.

Cuando una experiencia aleatoria se realiza con un **instrumento regular** (como un dado correcto), si el espacio muestral tiene n casos, la **probabilidad** de cada uno de esos casos es $\frac{1}{n}$.

Ejercicio resuelto

Calcular la probabilidad de cada uno de los casos que se pueden dar en las siguientes experiencias aleatorias:

- Extraer una bola de una bolsa que contiene 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y observar su número.
- Elegir a un asegurado de una compañía de seguros de coches.
- Elegir un día cualquiera de un año.

a) El espacio muestral es el siguiente:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser extraídas.

Como son 10, la probabilidad buscada es:

$$P[0] = P[1] = \dots = P[9] = \frac{1}{10} = 0,1$$

b) Si la compañía tiene, por ejemplo, 20 000 asegurados, la probabilidad de escoger a cada uno de ellos es $\frac{1}{20\,000}$.

c) Si el año es normal, la probabilidad de elegir un día concreto es $\frac{1}{365}$.

$$P[27 \text{ de junio}] = \frac{1}{365}$$

Si el año es bisiesto: $P[27 \text{ de junio}] = \frac{1}{366}$

Piensa y practica

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer el 5 DE BASTOS de una baraja española? ¿Y el REY DE COPAS?



- Si elegimos al azar una ficha de dominó, ¿cuál es la probabilidad de que sea el 6 DOBLE? (Recuerda que el dominó tiene 28 fichas).

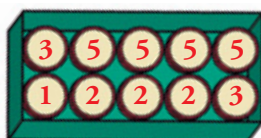
- Giramos la flecha en esta ruleta de colores:



¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el rojo?

Ley de Laplace

En un ejercicio propuesto del primer epígrafe de esta unidad, aparecía una caja con 10 fichas numeradas. Al sacar una de ellas al azar, parece lógico razonar así:



Por término medio...


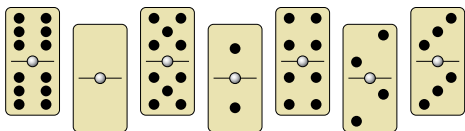
- El **1** saldrá 1 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{1}] = \frac{1}{10}$.
- El **2** saldrá 3 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{2}] = \frac{3}{10}$.
- El **3** saldrá 2 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{3}] = \frac{2}{10}$.
- El **5** saldrá 4 de cada 10 veces. Por tanto, $P[\text{5}] = \frac{4}{10}$.

Estos resultados se pueden generalizar así:


En una experiencia aleatoria con un instrumento regular, la probabilidad de un suceso, S , se obtiene así:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Ejercicios resueltos

<p>1. De una baraja de 40 naipes se extrae uno al azar.</p> <p>a) Hallar la probabilidad de sacar REY.</p> <p>b) Hallar la probabilidad de obtener COPAS.</p>	<p>a) En la baraja hay 4 reyes de un total de 40 cartas. Por tanto:</p> $P[\text{REY}] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ <p>b) Como hay 10 copas:</p> $P[\text{COPAS}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
<p>2. Hallar la probabilidad de que la flecha señale cada uno de los colores en la ruleta de la derecha.</p>	 <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> $P[\text{VERDE}] = \frac{3}{8}$ $P[\text{ROJO}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ </div> <div style="text-align: center;"> $P[\text{AMARILLO}] = \frac{1}{8}$ $P[\text{AZUL}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ </div> </div>
<p>3. De una caja de fichas de dominó, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea “doble”?</p>	<p>En el juego del dominó hay 28 fichas, de las cuales 7 son “dobles”. Por tanto:</p> $P[\text{DOBLE}] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ 

Piensa y practica

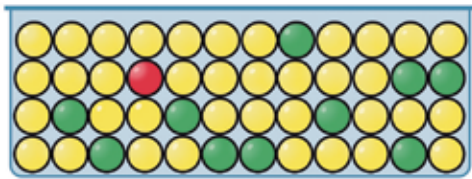
- 4.** Extraemos al azar una bola de esta urna. Calcula la probabilidad de que sea de cada uno de los colores.
- 
- 5.** Extraemos una carta de una baraja de 40. Halla la probabilidad de que sea:
- a) Un AS. b) Una SOTA. c) Un ORO.
- d) Un número menor que 5.
- e) Una FIGURA (las figuras son SOTA, CABALLO y REY).

Nombre y apellidos: Fecha:

Ejercicios y problemas

Muy probable, poco probable

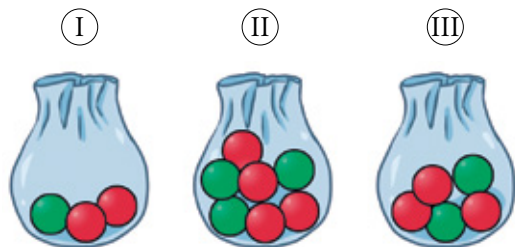
1. Tenemos una urna como esta:



Removemos y extraemos una bola al azar. Copia y asocia con flechas en tu cuaderno:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| $P[\text{ROJO}]$ | Imposible |
| $P[\text{VERDE}]$ | Muy poco probable |
| $P[\text{AMARILLO}]$ | Poco probable |
| $P[\text{NEGRO}]$ | Muy probable |

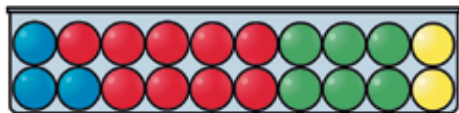
2. ¿En cuál de las siguientes bolsas es más probable sacar bola roja?



3. ¿En cuál de las ruletas es más difícil obtener color azul?



4. Al extraer una bola al azar de esta urna, ordena los colores de más probable a menos probable de obtener:



5. Imagina que extraes una carta de una baraja de 40 naipes. Escribe un suceso que sea IMPOSIBLE; otro que sea POCO PROBABLE; otro, MUY PROBABLE, y uno que sea SEGURO.

Espacio muestral. Sucesos

6. Indica el espacio muestral correspondiente a cada una de estas experiencias aleatorias:

- Lanzar dos monedas y contar el número de cruces.
- Sacar una bola de esta urna y ver qué número se obtiene:



- Sacar una moneda del bolsillo y observar su valor.
- Tirar un dado con forma de tetraedro y ver el número que has obtenido.



¿En cuáles de las experiencias de los apartados anteriores los casos no tienen la misma probabilidad?

7. Extraemos una ficha al azar de la siguiente urna y anotamos su número:




- Describe el espacio muestral. ¿Cuántos casos tiene?
- Describe los siguientes sucesos:

- A = ficha roja
- B = ficha verde
- C = ficha azul
- D = ficha roja con número impar
- E = ficha con número par


8. Una experiencia consiste en lanzar un dado y, después, lanzar una moneda. Los casos son: 1 y C; 1 y +; 2 y C; 2 y +; ...; 6 y C; 6 y +.

- Escribe el espacio muestral (son 12 casos).
- El suceso NÚMERO MAYOR QUE 5 Y CARA solo tiene un caso: 6 y C. Describe el suceso NÚMERO PAR Y CARA enumerando todos sus casos.
- Enumera los casos del suceso CUALQUIER NÚMERO Y CRUZ.

Cálculo de probabilidades en experiencias regulares




9.  ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los colores? Razónalo.




10.  Se extrae una bola al azar de una urna como la siguiente:




Indica la probabilidad de que:

- a) Sea roja.
b) No sea negra.
11.  Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Calcula la probabilidad de:
- a) Que la carta sea BASTOS.
b) Que la carta no sea AS.
c) Que la carta no sea FIGURA.
d) Que la carta sea AS O FIGURA.
12.  Calcula las siguientes probabilidades asociadas al lanzamiento de un dado correcto:
- a) El resultado es múltiplo de 3.
b) El resultado es múltiplo de 2.
c) El resultado es mayor que 1.
d) El resultado es menor que 5.
e) El resultado es menor que 1.
13.  Les doy vueltas, sin mirar, a las manecillas de un reloj. Calcula la probabilidad de que la hora que haya puesto sea:
- a) Entre las 3 y las 4. b) Antes de las 3.
c) Más tarde de las 10. d) Antes de las 6.

14.  Para un examen de Geografía, hay que saber situar sobre un mapa mudo las 17 comunidades autónomas de España. Ricardo solo sabe dónde se encuentran 10 de ellas.




- a) Si en el examen le piden situar una, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de las que sabe?
b) Supongamos que le piden que sitúe una de las que no sabe y, en vez de no contestar, lo hace a boleo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte?

Cálculo de probabilidades en experiencias irregulares

15.  De las 823 veces que he lanzado la taba que ves en la foto, en 185 ocasiones ha caído de esta forma:




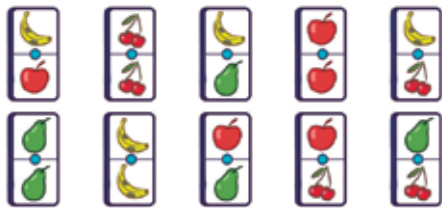
¿Qué probabilidad puede asignarse a que en el próximo lanzamiento la taba vuelva a caer de esta forma?

16.  En una cierta región, el 15% de los habitantes padecen una alergia, y de estos, el 60% tienen alergia al polen. ¿Qué probabilidad podemos asignar a que tomando una persona al azar no tenga alergia al polen?
17.  Lanzamos 1 000 veces una chincheta, obteniendo en 368 ocasiones la punta hacia arriba. ¿Qué probabilidad se puede asignar a que al volver a lanzarla caiga tumbada?
18.  Observando a un jugador de baloncesto, hemos contado 187 canastas y 85 fallos. ¿Qué probabilidad le asignaremos al suceso ACERTARÁ EL PRÓXIMO LANZAMIENTO?





Ejercicios y problemas

19.  Un juego parecido al dominó está formado por las siguientes piezas:




Las echamos a una bolsa y sacamos una al azar.

- ¿Es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?
 - Escribe el espacio muestral.
 - ¿Cuál es la probabilidad de sacar PERA/MANZANA?
20.  Dos fichas de la actividad anterior pueden encadenarse cuando alguna de sus dos figuras coincide. Ponemos sobre la mesa la ficha PLÁTANO/PERA y las demás quedan en la bolsa. Extraemos otra ficha al azar.
- Describe, dando todos sus casos, el suceso LA NUEVA FICHA PUEDE ENCADENARSE CON LA QUE HAY SOBRE LA MESA.
 - ¿Cuál es la probabilidad del suceso anterior?

21.  El juego del dominó consta de 28 fichas. Si elegimos una al azar, indica la probabilidad de que:

- Tenga un 3.
- No sea “doble”.
- Sus puntos sumen 7.
- Enlace con el 6-4 (¡Atención! Para este caso hemos de escoger una de las otras 27 fichas).

22.  En un restaurante hay:

Sopa, puré o ensalada de primero.

Carne, pescado o arroz de segundo.

Para finalizar, café o postre.

- ¿Cuántos menús distintos podemos elegir?
- Si nos sirven un menú elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea ENSALADA Y CARNE?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el menú lleve ARROZ?

Autoevaluación

1. Indica qué sucesos son aleatorios:

- Que tu equipo gane el siguiente partido.
- Obtener un 3 al lanzar un dado.
- Que no llueva el día que te vas de excursión al campo.
- Que se haga de noche donde vives.

2. Escribe el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias:

- Número de reyes que te tocan si te dan 5 cartas.
- Número de veces que aciertas en el centro al tirar tres dardos a la diana.
- Color de pelo de un compañero de clase elegido al azar.

3. He lanzado un dado defectuoso 1 000 veces y he obtenido 6 en 580 ocasiones. ¿Cuál puedes suponer que es la probabilidad de obtener un 6 en la siguiente tirada?

4. Calcula las siguientes probabilidades:

- Extraer un REY en una baraja de 40 cartas.
- Sacar una COPA en una baraja de 40 naipes.
- Obtener un número MAYOR QUE DOS al lanzar un dado.

5. Calcula la probabilidad de obtener cada uno de los colores que componen la ruleta al girar la flecha.



6. Tiramos dos dados y vemos los números obtenidos (1-1, 1-2, 1-3, ...). Elabora una tabla.

- Escribe el espacio muestral. (Consideramos que 1-2 es distinto de 2-1).
- Calcula la probabilidad de cada caso.
- ¿Cuál es la probabilidad del suceso EN ALGUNO DE LOS DADOS HA SALIDO UN 5? (El 5-5 también vale).