11 Muestreo. Distribuciones muestrales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Sábado

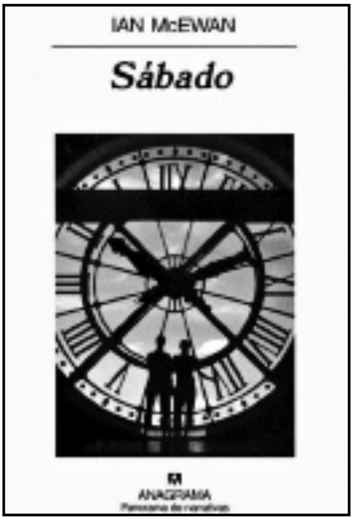
Como aparentando normalidad, las luces de aterrizaje destellan. Pero el ruido del motor lo delata todo. […]

Ya no piensa en despertar a Rosalind [su mujer]. ¿Para qué despertarla por esta pesadilla? De hecho, el espectáculo posee el aura familiar de un sueño recurrente. Como la mayoría de los pasajeros, exteriormente sojuzgados por la monotonía del transporte aéreo, a menudo deja que sus pensamientos repasen las probabilidades mientras está sentado, atado y dócil, delante de una comida envasada. Al otro lado de una pared de acero fino y alegre plástico chirriante la temperatura es de sesenta grados bajo cero y la altitud de cuarenta mil pies sobre el suelo. Lanzado a través del Atlántico a una velocidad de ciento cincuenta metros por segundo, te sometes a esta locura porque todo el mundo lo hace. Los demás pasajeros están tranquilos porque tú y los que te rodean parecéis serenos. Si se mira de una determinada manera –muertes de pasajeros por milla–, las estadísticas confortan. ¿Y cómo, si no, asistir a una conferencia en el sur de California? El viaje aéreo es un mercado bursátil, un truco de percepciones reflejadas, una frágil alianza de fe colectiva; siempre que los nervios no se desquicien y no haya bombas ni piratas aéreos a bordo, todo el mundo prospera. Cuando falle algo, no habrá medias tintas. Visto de otra forma –muertes por trayecto–, los números no son tan buenos. El mercado podría derrumbarse. […]

El avión pasa por detrás de las copas de los árboles. El fuego titila festiva, brevemente, entre las ramas grandes y pequeñas. Perowne da en pensar que debería hacer algo. Cuando los servicios de emergencia hayan tomado nota o transmitido su llamada, lo que tenga que ocurrir ya habrá pasado. Si está vivo, el piloto ya habrá avisado por radio. Quizás ya estén cubriendo de espuma la pista de aterrizaje. En esta etapa es inútil correr al hospital a ofrecer tu ayuda. Heathrow no figura en la zona de su plan de emergencia. En otro lugar, más al oeste, en dormitorios oscuros, personal médico se estará vistiendo sin saber qué ha sucedido. Faltan aún veinticuatro kilómetros de descenso. Si explotan los tanques de combustible no habrá salvación para los pasajeros.

IAN MCEWAN

Sábado
Ian McEwan



Esta novela trata de cómo la vida cotidiana, «feliz», de una persona o de un grupo social se puede alterar en un instante, sin poder evitarlo y sin que dependa de nuestra voluntad. Solo contiene esta referencia a las matemáticas, pero su lectura es muy recomendable. Hay otras novelas en las que se recurre en algún momento al lenguaje estadístico.

En *La caverna*, de Saramago, encontramos una utilización de la estadística cuando al alfarero Cipriano Algor el director del «centro comercial» le comunica que, tras una encuesta a los clientes, va a dejar de comprarle sus figuritas de barro:

Escogimos veinticinco personas de cada sexo, de profesiones e ingresos medios, personas con antecedentes familiares modestos, todavía apegadas a gustos tradicionales, y en cuyas casas la rusticidad del producto no desentonaría demasiado, E incluso así, Es verdad, señor Algor, incluso así los resultados fueron malos, Qué le vamos a hacer, señor, Veinte hombres y diez mujeres respondieron que no les gustaban los muñecos de barro, cuatro mujeres dijeron que quizá los compraran si fueran más grandes, tres podrían comprarlos si fuesen más pequeños, de los cinco hombres que quedaban, cuatro dijeron que ya no estaban en edad de jugar y otro protestó por el hecho de que tres de las figurillas representasen extranjeros, para colmo exóticos, y en cuanto a las ocho mujeres que todavía faltan por mencionar, dos se declararon alérgicas al barro, cuatro tenían malos recuerdos de esta clase de objetos, y sólo las dos últimas respondieron agradeciendo mucho la posibilidad que les había sido proporcionada de decorar gratuitamente su casa con unos muñequitos tan simpáticos, hay que añadir que se trata de personas de edad que viven solas, Me gustaría conocer los nombres y las direcciones de esas señoras para darles las gracias, dijo Cipriano Algor, Lo lamento, pero no estoy autorizado a revelar datos personales de los encuestados, es una condición estricta de cualquier sondeo de este tipo, respetar el anonimato de las respuestas. […] Buenas tardes, Buenas tardes.

En la novela de Vargas Llosa, *Pantaleón y las visitadoras*, el joven capitán Pantoja se ve en la necesidad de hacer un estudio estadístico cuando sus jefes, alarmados por las violaciones que estaban ocurriendo en los pueblos de la Amazonía donde había cuarteles, le encomiendan la delicada misión de reclutar un grupo de prostitutas –«las visitadoras»- y llevarlas por los acuartelamientos a cubrir las necesidades sexuales de los soldados. Para determinar la cantidad de visitadoras, el capitán, mediante una encuesta, averigua el número de usuarios potenciales, las prestaciones que desean al mes y la duración de las mismas.

Una compañía aérea cubre tres trayectos de 1.200, 3.500 y 5.600 millas, respectivamente. Realiza cuatro vuelos semanales en el primer trayecto y tres en los otros. En un año murieron 12 personas. Haciendo los cálculos necesarios, explica lo que quiso decir el novelista con las frases: «Las estadísticas confortan» y «los números no son tan buenos».

Las muertes de pasajeros por milla son: $\dfrac{12}{(4 \cdot 1.200 + 3 \cdot 3.500 + 3 \cdot 5.600) \cdot 52} = 0{,}0000072$

Las muertes por trayecto son: $\dfrac{12}{(4 + 3 + 3) \cdot 52} = 0{,}023$

Muestreo. Distribuciones muestrales

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Halla la media aritmética de estos datos.

a)

42	51	56	66	75	47	51	45	63	79
69	59	50	70	59	62	54	60	63	58

b)

16	20	26	23	22	13	21	18
16	19	14	17	11	17	15	26

a) $\overline{x} = 58{,}95$

b) $\overline{x} = 18{,}375$

002 Halla la varianza y la desviación típica de los datos.

a)

42	51	56	66	75	47	51	45	63	79
69	59	50	70	59	62	54	60	63	58

b)

16	20	26	23	22	13	21	18
16	19	14	17	11	17	15	26

a) $\sigma^2 = 92{,}05$ $\quad\sigma = 9{,}59$

b) $\sigma^2 = 18{,}11$ $\quad\sigma = 4{,}26$

003 Si $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$; calcula:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(\overline{B} - A)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}1$

d) $P(\overline{B} - A) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}2$

ACTIVIDADES

001 Razona qué sería mejor, si analizar una muestra o la población para estudiar las siguientes características.

a) Talla de pantalón de un grupo de amigos.
b) Temperatura de tu Comunidad.
c) Peso medio de los habitantes de un país.
d) Dinero gastado a la semana por los miembros de tu familia.
e) Color del pelo de tus compañeros de clase.

a) La población, porque el número de observaciones es muy reducido.
b) Una muestra, porque no podemos medir la temperatura de todos los puntos de la Comunidad.
c) Una muestra, porque el número de habitantes es muy grande.
d) La población, porque el número de observaciones es muy reducido.
e) La población, porque el número de observaciones es muy reducido.

002 **Este es el titular de un periódico:**

«LA ALTURA MEDIA DE LOS ESPAÑOLES ES 167 cm»

¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se habrá estudiado a toda la población?

No se habrá estudiado a toda la población, sino que se habrá hecho un estudio estadístico sobre una muestra, y el titular del periódico extrapola los resultados de la muestra a toda la población.

003 **Inventa un estudio estadístico y especifica cuál es la población, la muestra y el tamaño de la población y de la muestra.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

En un centro escolar se quiere realizar un estudio sobre las horas semanales dedicadas a practicar deporte; para ello se elige una muestra formada por 5 alumnos de cada clase, es decir, si el centro tiene 750 alumnos repartidos en 30 aulas, el tamaño de la población es 750 y el tamaño de la muestra es de 150.

004 **Decide si estos procesos pueden ser muestreos aleatorios.**

a) En un IES de 190 alumnos y 210 alumnas se extrae una muestra formada por 20 alumnos y 20 alumnas.

b) Se realiza una encuesta a los jóvenes de una ciudad mediante un enlace en una página web.

a) La probabilidad de escoger a los alumnos y las alumnas en la población es:

$$P(\text{alumno}) = \frac{190}{400} = 0{,}475 \qquad P(\text{alumna}) = \frac{210}{400} = 0{,}525$$

Si el procedimiento fuera aleatorio, la proporción de alumnos y alumnas en la muestra debería mantenerse.

En la muestra, la probabilidad es:

$$P(\text{alumno}) = \frac{20}{40} = 0{,}5 \qquad P(\text{alumna}) = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

Este procedimiento no es un muestreo aleatorio.

b) Este procedimiento no es un muestreo aleatorio, pues la muestra estaría formada solo por los jóvenes que accedieran a la página web.

005 **¿Podrías modificar el procedimiento para obtener las muestras anteriores de modo que resultaran muestras aleatorias? Explica de forma razonada cómo lo haces.**

a) Si se extrae una muestra formada por 19 alumnos y 21 alumnas, el procedimiento podría considerarse aleatorio ya que de este modo la probabilidad de elegir un alumno o una alumna es la misma en la población y en la muestra.

b) Se podría tomar el censo de la ciudad y, entre los jóvenes que aparecen en él, elegir al azar el número de ellos para formar la muestra.

006 **Pon dos ejemplos de estudios donde no podamos extraer muestras aleatorias.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: Si un médico hace un estudio escogiendo a los pacientes que acuden a su consulta en un determinado día, o si un establecimiento lo hace eligiendo a los clientes que pagaron con tarjeta de crédito en una franja horaria.

007 **Dada la población {1, 3, 5, 7}, forma las muestras posibles de tamaño 2.**

a) Sin reposición. **b) Con reposición.**

a) Las muestras posibles son: {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 7}

b) Las muestras posibles son:
{1, 1}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 3}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}

008 **Halla la población formada por las medias de todas las muestras de tamaño 2 de {1, 3, 5, 7} y, después, calcula su media.**

a) Sin reposición. **b) Con reposición.**

a) La población formada por las medias es: {2, 3, 4, 4, 5, 6}
Su media es: $\overline{x} = 4$

b) La población formada por las medias es: {1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7}
Su media es: $\overline{x} = 4$

009 **En una granja avícola hay 2.350 gallinas ponedoras. Para estudiar el tamaño de los huevos que ponen, di cómo extraerías muestras sistemáticas de los siguientes tamaños:**

a) $n = 25$ **b) $n = 235$** **c) $n = 50$** **d) $n = 60$**

a) Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2.350 gallinas, y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2.350}{25} = 94$

Elegimos al azar el número 32 (un número entre 1 y 94) y determinamos la gallina con este número como el primer elemento de la muestra; los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:
$32 + 94 = 126,\ 32 + 2 \cdot 94 = 220,\ \dots,\ 32 + 24 \cdot 94 = 2.288$

b) Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2.350 gallinas, y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2.350}{235} = 10$

Elegimos al azar el número 4 (un número entre 1 y 10) y determinamos la gallina con este número como el primer elemento de la muestra; los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:
$4 + 10 = 14,\ 4 + 2 \cdot 10 = 24,\ \dots,\ 4 + 10 \cdot 234 = 2.344$

c) Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2.350 gallinas, y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2.350}{50} = 47$

Elegimos al azar el número 19 (un número entre 1 y 47) y determinamos la gallina con este número como el primer elemento de la muestra; los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:
$19 + 47 = 66,\ 19 + 2 \cdot 47 = 113,\ \dots,\ 19 + 46 \cdot 47 = 2.181$

d) Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2.350 gallinas, y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2.350}{60} = 39$

Elegimos al azar el número 28 (un número entre 1 y 39) y determinamos la gallina con este número como el primer elemento de la muestra; los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:
$28 + 39 = 67, 28 + 2 \cdot 39 = 106, \dots, 28 + 38 \cdot 39 = 1.510$

010 **Di si esta muestra sistemática es representativa de los alumnos de un IES para estudiar su peso; en caso negativo, propón una que sí lo sea:**

Se ordenan los alumnos atendiendo a su altura y se elige al que ocupa el número 3 y, después, se hace cada 10 posiciones hasta completar la muestra.

La muestra no es representativa, ya que normalmente la altura está relacionada con el peso; por tanto, para obtener una muestra que sea representativa, el orden asignado a los alumnos debe ser independiente de la variable que se estudie; por ejemplo, en este caso podríamos haber ordenado los alumnos por orden alfabético de sus apellidos.

011 **De una población de 280 hombres y 320 mujeres se desea seleccionar una muestra estratificada, con afijación proporcional de tamaño 60, distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?**

Elegimos los estratos de la población: hombres y mujeres.

Calculamos el número de elementos que debe tener cada muestra aleatoria simple extraída de los estratos:

$$\frac{n_1}{280} = \frac{n_2}{320} = \frac{60}{600} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 28 \\ n_2 = 32 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 28 hombres y 32 mujeres.

012 **Tenemos 1.133 yogures de tres marcas diferentes, y queremos hallar una muestra estratificada con afijación igual de tamaño 81, para estudiar su contenido en grasas. ¿Cómo lo harías?**

Elegimos como estratos de la población los tres tipos de yogures según cada marca.

Tomamos una muestra aleatoria simple dentro de cada estrato de tamaño: $\frac{81}{3} = 27$; es decir, seleccionamos 27 yogures de cada marca.

013 **Un IES se compone de 4 clases de 1.º de ESO, 4 de 2.º de ESO, 4 de 3.º de ESO y 4 de 4.º de ESO. En cada una de las 4 plantas que tiene el centro, hay una clase de cada curso.**

Di cómo se extrae una muestra estratificada y otra por conglomerados.

Para la muestra estratificada, segmentamos la población en estratos eligiendo 4 estratos formados por los alumnos de cada curso; de esta manera los estratos son diferentes entre sí, los alumnos de 1.º son diferentes de los de 2.º, 3.º o 4.º, y dentro de cada estrato los alumnos son más homogéneos, y el comportamiento de los alumnos de un mismo curso es similar entre ellos.

Para la muestra por conglomerados, segmentamos la población en conglomerados eligiendo 4 conglomerados formados por los alumnos de cada planta del instituto; de esta manera los conglomerados son muy parecidos entre sí y, sin embargo, el comportamiento de los alumnos dentro de un mismo conglomerado es muy diferente entre ellos.

014 **Pon un ejemplo de situación en la que la muestra más conveniente se obtenga mediante muestreo por conglomerados y otro en que se obtenga por muestreo estratificado con afijación proporcional. Explica en qué se diferencian.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Aplicaríamos un muestreo por conglomerados si deseáramos conocer la opinión de los profesores de una ciudad ante cierta medida educativa sobre la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato; cada IES se puede considerar un conglomerado puesto que la opinión no diferirá mucho del resto de institutos y la variación se presenta entre los distintos profesores del mismo instituto. Este sistema permite recoger la información con facilidad visitando un número adecuado de centros de enseñanza.

Aplicaríamos un muestreo estratificado con afijación proporcional si deseáramos conocer la opinión de los profesores de una ciudad ante cierta medida educativa sobre la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato, diferenciando entre los distintos tipos de enseñanza: privada, pública y concertada. Cada tipo de enseñanza segmentaría la población en estratos que, a priori, deberían ser muy diferentes entre sí.

La diferencia entre ambos tipos de muestreo es que, mientras que los estratos son diferentes entre ellos, los individuos de un mismo estrato son muy parecidos; en el caso de los conglomerados sucede al revés, son muy parecidos a otros conglomerados y, sin embargo, los individuos dentro de cada conglomerado son muy heterogéneos.

015 **Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 3, al lanzar 5 veces un dado de 6 caras, sigue una distribución binomial.**

La variable es discreta, pues solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de veces que se realiza el experimento es: $n = 5$

El suceso que estudiamos es: $A =$ «Salir un 3»

Cada lanzamiento del dado es independiente y la probabilidad de A es: $\frac{1}{6}$

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial $B\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

016 **Calcula la probabilidad de que la variable aleatoria, *X*, que cuenta el número de veces que sale un 3 en 5 tiradas de un dado, sea mayor o igual que 3.**

$$X \equiv B\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= 0{,}0322 + 0{,}0032 + 0{,}0001 = 0{,}0355$$

017 Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que obtengo, al sacar 3 veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente.
Calcula la probabilidad de que obtenga 2 bolas blancas.

$$X \equiv B\left(3, \frac{2}{5}\right) \qquad P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}288$$

018 Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula:

a) La probabilidad de que alguna bola sea blanca.

b) La probabilidad de obtener todas las bolas de color rojo.

a) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}784$

b) $P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}216$

019 Tipifica los siguientes valores de una variable aleatoria con $\mu = 2$ y $\sigma = 3$.

a) $x_1 = 3$

b) $x_2 = 4{,}5$

c) $x_3 = -0{,}5$

d) $x_4 = -1$

a) $3 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{3-2}{3} = 0{,}33$

b) $4{,}5 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{4{,}5-2}{3} = 0{,}83$

c) $-0{,}5 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{-0{,}5-2}{3} = -0{,}83$

d) $-1 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{-1-2}{3} = -1$

020 Compara los datos de estas distribuciones:

$x_1 = 1$ (con $\mu = 1$, $\sigma = 2$)

$x_2 = 2$ (con $\mu = 2$, $\sigma = 1$)

$x_3 = 1{,}5$ (con $\mu = 1{,}5$; $\sigma = 1{,}5$)

Para compararlos primero tipificamos:

$1 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1-1}{2} = 0$

$2 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{2-2}{1} = 0$

$1{,}5 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5} = 0$

Los datos representan el mismo valor, cada uno dentro de su distribución.

021 Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(2, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 3)$ c) $P(X = 4)$ e) $P(X < 5)$

b) $P(X > 1)$ d) $P(X = 6)$ f) $P(X = 8)$

a) $P(X < 3) = P\left(\dfrac{X-2}{2} < \dfrac{3-2}{2}\right) = P(Z < 0{,}5) = 0{,}6915$

b) $P(X > 1) = P\left(\dfrac{X-2}{2} > \dfrac{1-2}{2}\right) = P(Z > -0{,}5) = P(Z \le 0{,}5) = 0{,}6915$

c) $P(X = 4) = 0$

d) $P(X = 6) = 0$

e) $P(X < 5) = P\left(\dfrac{X-2}{2} < \dfrac{5-2}{2}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$

f) $P(X = 8) = 0$

022 Una variable aleatoria X se distribuye según una normal de media μ y desviación típica σ. Sabemos que los cuartiles de la distribución son 10 y 20, respectivamente. ¿Cuánto valen la media μ y la desviación típica σ?

Si $Q_1 = 10 \rightarrow P(X < 10) = 0{,}25$

Si $Q_3 = 20 \rightarrow P(X < 20) = 0{,}75$

Entonces, resulta que:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \rightarrow -\frac{10-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{20-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

Resolvemos: $\left.\begin{array}{l}\mu - 0{,}68\sigma = 10\\ \mu + 0{,}68\sigma = 20\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu = 15\\ \sigma = 7{,}35\end{array}\right.$

023 Dada una distribución normal $N(22, 5)$, calcula los intervalos característicos que tienen las siguientes probabilidades.

a) $p = 0{,}9$ b) $p = 0{,}95$ c) $p = 0{,}99$

a) $0{,}9 = P(22 - k < X < 22 + k) = P\left(\dfrac{22-k-22}{5} < \dfrac{X-22}{5} < \dfrac{22+k-22}{5}\right) =$

$= P\left(\dfrac{-k}{5} < Z < \dfrac{k}{5}\right) = P\left(Z < \dfrac{k}{5}\right) - P\left(Z > \dfrac{-k}{5}\right) =$

$= 2P\left(Z < \dfrac{k}{5}\right) - 1 \rightarrow P\left(Z < \dfrac{k}{5}\right) = 0{,}95 \rightarrow \dfrac{k}{5} = 1{,}645 \rightarrow k = 8{,}225$

El intervalo característico es: $(22 - 8{,}225; 22 + 8{,}225) = (13{,}775; 30{,}225)$

b) $0{,}95 = P(22-k<X<22+k)=P\left(\frac{22-k-22}{5} < \frac{X-22}{5} < \frac{22+k-22}{5}\right) =$

$= P\left(\frac{-k}{5} < Z < \frac{k}{5}\right) = P\left(Z < \frac{k}{5}\right) - P\left(Z > \frac{-k}{5}\right) =$

$= 2P\left(Z < \frac{k}{5}\right) - 1 \rightarrow P\left(Z < \frac{k}{5}\right) = 0{,}975 \rightarrow \frac{k}{5} = 1{,}96 \rightarrow k = 9{,}8$

El intervalo característico es: (22 − 9,8; 22 + 9,8) = (12,2; 31,8)

c) $0{,}99 = P(22-k<X<22+k)=P\left(\frac{22-k-22}{5} < \frac{X-22}{5} < \frac{22+k-22}{5}\right) =$

$= P\left(\frac{-k}{5} < Z < \frac{k}{5}\right) = P\left(Z < \frac{k}{5}\right) - P\left(Z > \frac{-k}{5}\right) =$

$= 2P\left(Z < \frac{k}{5}\right) - 1 \rightarrow P\left(Z < \frac{k}{5}\right) = 0{,}995 \rightarrow \frac{k}{5} = 2{,}58 \rightarrow k = 12{,}9$

El intervalo característico es: (22 − 12,9; 22 + 12,9) = (9,1; 34,9)

024 **En una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ sabemos que el intervalo característico de probabilidad 0,95 es (340, 430). Halla la media y la desviación típica de esta distribución normal.**

Si (340, 430) es el intervalo característico, entonces la media de la distribución es:

$$\mu = \frac{340 + 430}{2} = 385$$

Como $0{,}95 = P(340 < X < 430)$:

$$0{,}95 = P\left(\frac{340-385}{\sigma} < \frac{X-385}{\sigma} < \frac{430-385}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-45}{\sigma} < Z < \frac{45}{\sigma}\right) = 2P\left(Z < \frac{45}{\sigma}\right) - 1$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{45}{\sigma}\right) = 0{,}975 \rightarrow \frac{45}{\sigma} = 1{,}96 \rightarrow \sigma = 22{,}96$$

025 **Una fábrica de ordenadores elabora 2.500 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 2 %, ¿cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sea mayor que 50? ¿Y menor que 25?**

La variable aleatoria sigue una distribución binomial:

$X \equiv B(2.500;\ 0{,}02)$

Comprobamos si se puede aproximar por una distribución normal:

$np = 50 > 5 \qquad\qquad n(1-p) = 2.450 > 5$

Entonces, resulta que: $X \equiv B(2.500;\ 0{,}02) \approx N(50,\ \sqrt{49}\,) = N(50,\ 7)$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-50}{7} > \frac{50-50}{7}\right) = P(Z > 0) = 0{,}5$$

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-50}{7} < \frac{25-50}{7}\right) = P(Z < -3{,}57) =$$
$$= 1 - P(Z < 3{,}57) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$$

026 **El 10 % de las personas de una ciudad afirma que nunca utiliza Internet. Calcula la probabilidad de que, escogidas 100 personas al azar, haya al menos 14 personas que no usen Internet. ¿Qué probabilidad hay de que sean exactamente 14?**

La variable aleatoria sigue una distribución binomial: $X \equiv B(100;\ 0{,}1)$

Comprobamos si se puede aproximar por una distribución normal:

$np = 10 > 5$ $\qquad\qquad n(1-p) = 90 > 5$

Entonces, resulta que: $X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10,\ \sqrt{9}\,) = N(10,\ 3)$

$$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{13{,}5-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}17) =$$
$$= 1 - P(Z < 1{,}17) = 1 - 0{,}8790 = 0{,}1210$$

$$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}8790 = 0{,}0542$$

027 **El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de 100 personas supere los 6.850 kg? ¿Y de que sea menor que 6.800 kg?**

$X \equiv N(100 \cdot 67,\ 5\sqrt{100}\,) = N(6.700,\ 50)$

$$P(X > 6.850) = P\left(\frac{X-6.700}{50} > \frac{6.850-6.700}{50}\right) = P(Z > 3) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

$$P(X < 6.800) = P\left(\frac{X-6.700}{50} < \frac{6.800-6.700}{50}\right) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

028 **El peso de los habitantes de una ciudad sigue una ley normal de media de 67 kg y desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que al subir 9 personas en un ascensor superen el peso máximo admitido de 650 kg?**

$X \equiv N(9 \cdot 67,\ 5\sqrt{9}\,) = N(603,\ 15)$

$$P(X > 650) = P\left(\frac{X-603}{15} > \frac{650-603}{15}\right) = P(Z > 3{,}13) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 3{,}13) = 1 - 0{,}9991 = 0{,}0009$$

029 El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68,5 kg? ¿Y de que sea menor que 68 kg?

$$\overline{X} \equiv N\left(67;\ \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(67;\ 0{,}5)$$

$$P(\overline{X} > 68{,}5) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} > \frac{68{,}5-67}{0{,}5}\right) = P(Z > 3) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

$$P(\overline{X} < 68) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} < \frac{68-67}{0{,}5}\right) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

030 Una variable aleatoria sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 22$ y $\sigma = 4$. Halla las distribuciones de las medias muestrales de muestras de tamaño 9, 16, 25, 36 y 100. ¿Podrías hacerlo si la población no siguiera una distribución normal?

$$n = 9 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{9}}\right) = N(22;\ 1{,}33)$$

$$n = 16 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(22,\ 1)$$

$$n = 25 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(22;\ 0{,}8)$$

$$n = 36 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{36}}\right) = N(22;\ 0{,}67)$$

$$n = 100 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{100}}\right) = N(22;\ 0{,}4)$$

Se podrían hallar las distribuciones de las medias muestrales en los dos últimos casos, cuando $n > 30$.

031 El 10 % de los yogures de fruta contienen menos fruta de lo que se anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado una muestra de 900 yogures.

¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de envases incompletos de la muestra?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}1;\ \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{900}}\right) = N(0{,}1;\ 0{,}01)$$

032 El 10 % de los yogures de fresa contienen menos fruta de lo que se anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado una muestra de 900 yogures.

Halla la probabilidad de que en la muestra se encuentren 100 yogures con menos fruta.

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}1;\ \sqrt{\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{900}}\right) = N(0{,}1;\ 0{,}01)$$

$$P\left(\widehat{P} \geq \frac{100}{900}\right) = P(\widehat{P} \geq 0{,}11) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0{,}1}{0{,}01} \geq \frac{0{,}11 - 0{,}1}{0{,}01}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

033 **Dos poblaciones tienen medias 10 y 12 y desviaciones típicas 1 y 2, respectivamente. Halla la distribución de la diferencia de medias con muestras de tamaño 40 y 50 extraídas de estas poblaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea menor que 0,5?**

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(12 - 10;\ \sqrt{\frac{1}{40} + \frac{4}{50}}\right) = N(2;\ 0{,}32)$$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 0{,}5) = P\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 2}{0{,}32} < \frac{0{,}5 - 2}{0{,}32}\right) = P(Z < -4{,}69) = 0$$

034 **Dos poblaciones siguen una distribución normal con medias 25 y 30 y desviaciones típicas 1 y 2, respectivamente. Calcula la distribución de la diferencia de medias con muestras de tamaño 16. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea menor que 3?**

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(30 - 25;\ \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}}\right) = N(5;\ 0{,}56)$$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 3) = P\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 5}{0{,}56} < \frac{3 - 5}{0{,}56}\right) = P(Z < -3{,}57) = 0$$

035 **Una marca automovilista ha fabricado 4.000 coches de un determinado modelo. Se quiere extraer una muestra de 200 coches para realizar controles de calidad. Explica cómo deben elegirse los coches para obtener la muestra mediante:**

a) Muestreo aleatorio simple. **b) Muestreo aleatorio sistemático.**

a) Numeramos los 4.000 coches y elegimos aleatoriamente 200 de ellos.

b) Numeramos los 4.000 coches y determinamos la constante de elevación:

$$h = \frac{4.000}{200} = 20$$

Elegimos aleatoriamente un coche entre los 20 primeros, y a partir de él, escogemos coches de 20 en 20 hasta completar los 200 elementos de la muestra.

036 **Un dado tetraédrico está numerado del 1 al 4.**

a) Calcula la media y la desviación típica de la población formada por los cuatro números.

b) Forma todas las muestras posibles de tamaño 2 que podemos obtener con repetición de esta población.

c) Halla la media y la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras.

a) $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} - 2{,}5^2} = 1{,}12$$

b) Las muestras posibles son:
{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 3}, {3, 4}, {4, 4}

c) La población formada por las medias es: {1; 1,5; 2; 2,5; 2; 2,5; 3; 3; 3,5; 4}
$\overline{x} = 2{,}5$ $\sigma = 0{,}87$

037 **Dada la población {1, 2, 3}, forma las muestras posibles de tamaño 2 sin reemplazamiento.**

a) Calcula la media y la desviación típica de la población.

b) Halla la media y la desviación típica de la distribución de las medias muestrales.

c) ¿Qué relación hay entre ellas?

Las muestras posibles son: {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}

a) $\overline{x} = 2$ $\sigma = 0{,}82$

b) La población formada por las medias es: {1,5; 2; 2,5}
$\overline{x} = 2$ $\sigma = 0{,}41$

c) Las medias coinciden, pero la desviación típica es menor en la distribución de las medias.

038 **Sea la población de elementos {22, 24, 26}.**

a) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) Calcule la varianza de la población.

c) Calcule la varianza de las medias muestrales.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 3)

a) Las muestras posibles son: {22, 24}, {22, 26}, {24, 26}

b) $\sigma^2 = 2{,}67$

c) La población formada por las medias es: {23, 24, 25} $\sigma^2 = 0{,}67$

039 **Un distribuidor de frutas tiene 3.000 manzanas de distintas clases: 1.224 de tipo *A*, 857 de tipo *B*, 495 de tipo *C* y 424 de tipo *D*. Se quiere extraer una muestra de 150 manzanas, ¿cuántas hay que elegir de cada clase para que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?**

$$\frac{n_1}{1.224} = \frac{n_2}{857} = \frac{n_3}{495} = \frac{n_4}{424} = \frac{150}{3.000} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 61 \\ n_2 = 43 \\ n_3 = 25 \\ n_4 = 21 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 61 manzanas de tipo *A*, 43 de tipo *B*, 25 de tipo *C* y 21 de tipo *D*.

040 **En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Qué composición tendrá dicha muestra?**

(Andalucía. Año 2005. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 3)

$$\frac{n_1}{60} = \frac{n_2}{40} = \frac{5}{100} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 3 mujeres y 2 hombres.

041 **De una población de 3.500 hombres y 2.700 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 100 distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?**

La población está formada por 6.200 individuos.

$$\frac{n_1}{3.500} = \frac{n_2}{2.700} = \frac{100}{6.200} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 56 \\ n_2 = 44 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 56 hombres y 44 mujeres.

042 **De una población de 3.500 hombres y 2.700 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación igual, una muestra de tamaño 100 distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?**

Discute si sería mejor que el muestreo fuera con afijación proporcional o con afijación igual.

Si la muestra se selecciona por afijación igual debe estar formada por:

$\frac{100}{2} = 50$ individuos; es decir, 50 hombres y 50 mujeres.

Para que la muestra se ajustara más a la composición de la población sería mejor utilizar el muestreo por afijación proporcional.

043 **En un centro juvenil tienen una colección de videojuegos organizada en cinco bloques: 500 clásicos, 860 de estrategia, 1.200 deportivos, 700 de ciencia-ficción y 740 históricos.**

Se desea estimar el porcentaje de juegos europeos presentes en la colección, y para ello se selecciona una muestra del 10 % del número total de videojuegos a través de un muestreo aleatorio estratificado. Determina el número de juegos de cada tipo que hay que seleccionar si se considera:

a) Afijación igual.

b) Afijación proporcional.

El número total de videojuegos es: $500 + 860 + 1.200 + 700 + 740 = 4.000$

10 % de $4.000 = 400$ es el tamaño de la muestra seleccionada.

a) Si la muestra se selecciona por afijación igual debe estar formada por:

$\frac{400}{5} = 80$ videojuegos de cada tipo

b) Si la muestra se selecciona con afijación proporcional en cada estrato varía el número de juegos elegidos.

$$\frac{n_1}{500} = \frac{n_2}{860} = \frac{n_3}{1.200} = \frac{n_4}{700} = \frac{n_5}{740} = \frac{400}{4.000} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 50 \\ n_2 = 86 \\ n_3 = 120 \\ n_4 = 70 \\ n_5 = 74 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 50 juegos clásicos, 86 de estrategia, 120 deportivos, 70 de ciencia-ficción y 74 históricos.

044 **En una nueva urbanización viven 800 hombres, 900 mujeres y 400 niños. Selecciona una muestra de 80 personas, utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra?**

$$\frac{n_1}{800} = \frac{n_2}{900} = \frac{n_3}{400} = \frac{80}{2.100} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 31 \\ n_2 = 34 \\ n_3 = 15 \end{cases}$$

La muestra debe estar compuesta por 31 hombres, 34 mujeres y 15 niños.

045 **En una urbanización viven 5.000 personas, de las cuales 1.000 viven en chalés con jardín, 1.500 en adosados de 2 plantas y 2.500 en bloques de apartamentos de 4 alturas. Se quiere seleccionar una muestra de 100 personas, utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra?**

$$\frac{n_1}{1.000} = \frac{n_2}{1.500} = \frac{n_3}{2.500} = \frac{100}{5.000} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 20 \\ n_2 = 30 \\ n_3 = 50 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 20 personas que vivan en chalés con jardín, 30 que vivan en adosados de 2 plantas y 50 que lo hagan en bloques de apartamentos de 4 alturas.

046 **En cierta cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el departamento de ventas, 200 en el departamento de contabilidad y 100 en el departamento de atención al cliente.**
Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

Justificar las respuestas.

(Extremadura. Junio 2005. Opción B. Problema 3)

a) Dado que los trabajadores pertenecen a departamentos con distintas composiciones de personal, es más apropiado utilizar un muestreo estratificado.

b) Utilizamos un muestreo estratificado con afijación proporcional.

$$\frac{n_1}{150}=\frac{n_2}{450}=\frac{n_3}{200}=\frac{n_4}{100}=\frac{180}{900}\rightarrow\begin{cases}n_1=30\\n_2=90\\n_3=40\\n_4=20\end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 30 personas del departamento de personal, 90 de ventas, 40 de contabilidad y 20 de atención al cliente.

047 **En un centro de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán y se ofrece un total de 2.000 plazas. Mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se ha seleccionado una muestra formada por 28 estudiantes de inglés, 32 de francés y 20 de alemán. Determina cuál es la distribución de estudiantes de cada idioma en el centro.**

$$\frac{28}{x}=\frac{32}{y}=\frac{20}{z}=\frac{80}{2.000}\rightarrow\begin{cases}x=700\\y=800\\z=500\end{cases}$$

En el centro hay 700 estudiantes de inglés, 800 de francés y 500 de alemán.

048 **a) Los salarios de los trabajadores de un país puede suponerse que siguen una distribución normal de media 2.000 € y desviación típica desconocida. Si la probabilidad de ganar más de 2.100 € es de 0,33; ¿cuál es la desviación típica?**

b) Los salarios en euros de los trabajadores en un segundo país también puede suponerse que siguen una distribución normal con la misma media y con varianza de 40.000 €. ¿Es más fácil ganar más de 2.100 € en este segundo país que en el país del apartado anterior?

(Castilla y León. Junio 2006. Bloque A. Pregunta 3)

a) $\overline{X}\equiv N(2.000,\ \sigma)$

Si $P(X>2.100)=0{,}33\rightarrow P\left(\frac{X-2.000}{\sigma}>\frac{2.100-2.000}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{100}{\sigma}\right)=$

$$=1-P\left(Z\leq\frac{100}{\sigma}\right)=0{,}33\rightarrow P\left(Z\leq\frac{100}{\sigma}\right)=0{,}67$$

$$\rightarrow\frac{100}{\sigma}=0{,}44\rightarrow\sigma=227{,}27$$

b) $\overline{X}\equiv N(2.000,\ \sqrt{40.000})=N(2.000,\ 200)$

$$P(X>2.100)=P\left(\frac{X-2.000}{200}>\frac{2.100-2.000}{200}\right)=P(Z>0{,}5)=$$

$$=1-P(Z\leq 0{,}5)=1-0{,}6915=0{,}3085$$

Es más fácil ganar más de 2.100 € en el primer país.

049 **Una variable aleatoria sigue una distribución normal de parámetros $\mu=9$ y $\sigma=3$. Halla las distribuciones de las medias muestrales para muestras de tamaño 25, 36 y 100.**

$$n = 25 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{25}}\right) = N(9;\ 0{,}6)$$

$$n = 36 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{36}}\right) = N(9;\ 0{,}5)$$

$$n = 100 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{100}}\right) = N(9;\ 0{,}3)$$

050 Los resultados de una prueba deportiva realizada por un grupo de alumnos siguen una distribución normal con media $\mu = 5{,}4$ y desviación típica $\sigma = 1$.

Si se toma una muestra aleatoria formada por 4 alumnos:

a) Halla la media y la desviación típica de la media muestral.

b) Calcula la probabilidad de que la media muestral sea superior a 5,5.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 5,1 y 5,3?

a) $\overline{X} \equiv N\left(5{,}4;\ \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = N(5{,}4;\ 0{,}5)$

b) $$P(\overline{X} > 5{,}5) = P\left(\frac{\overline{X} - 5{,}4}{0{,}5} > \frac{5{,}5 - 5{,}4}{0{,}5}\right) = P(Z > 0{,}2) =$$
$$= 1 - P(Z \le 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = 0{,}4207$$

c) $$P(5{,}1 < \overline{X} < 5{,}3) = P\left(\frac{5{,}1 - 5{,}4}{0{,}5} < \frac{\overline{X} - 5{,}4}{0{,}5} < \frac{5{,}3 - 5{,}4}{0{,}5}\right) =$$
$$= P(-0{,}6 < Z < -0{,}2) = P(0{,}2 < Z < 0{,}6) =$$
$$= P(Z < 0{,}6) - P(Z \le 0{,}2) = 0{,}7257 - 0{,}5793 = 0{,}1464$$

051 El gasto mensual de los jóvenes de una región durante los fines de semana sigue una distribución normal de media 25 € y desviación típica 3 €.

¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 jóvenes tenga un gasto medio comprendido entre 23,85 € y 26,15 €?

$$\overline{X} \equiv N\left(25;\ \frac{3}{\sqrt{64}}\right) = N(25;\ 0{,}375)$$

$$P(23{,}85 < \overline{X} < 26{,}15) = P\left(\frac{23{,}85 - 25}{0{,}375} < \frac{\overline{X} - 25}{0{,}375} < \frac{26{,}15 - 25}{0{,}375}\right) =$$
$$= P(-3{,}07 < Z < 3{,}07) = 2P(Z < 3{,}07) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}9989 - 1 = 0{,}9978$$

052 Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una distribución normal de media 125 g y desviación típica 4 g.

a) Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?

b) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(125;\ \dfrac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(125;\ 0{,}8)$

$$P(124 < \overline{X} < 126) = P\left(\frac{124-125}{0{,}8} < \frac{\overline{X}-125}{0{,}8} < \frac{126-125}{0{,}8}\right) =$$
$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) = 2P(Z < 1{,}25) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(125;\ \dfrac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(125;\ 0{,}5)$

$$P(\overline{X} > 124) = P\left(\frac{\overline{X}-125}{0{,}5} > \frac{124-125}{0{,}5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

053 En un estudio realizado por la empresa en una autopista se han recogido las siguientes velocidades en un mismo tramo:

95	108	97	112
99	106	105	100
99	98	104	110
107	111	103	110

Si la velocidad en este tramo sigue una distribución normal de varianza 25, ¿cuáles son los parámetros de la distribución de la media muestral?

En la muestra: $\overline{x} = 104$

Así, tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(104;\ \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}\right) = N(104;\ 1{,}25)$

054 Sea X una variable aleatoria normal de media 50 y desviación típica 4.

a) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?

b) Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria «Media muestral para muestras de tamaño 16», calcule el valor de a para que $P(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a) = 0{,}9876$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{4}}\right) = N(50, 2)$

$$P(\overline{X} > 54) = P\left(\frac{\overline{X} - 50}{2} > \frac{54 - 50}{2}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $\overline{X}_{16} \equiv N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50, 1)$

$$P(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a) = P\left(\frac{50 - a - 50}{1} \leq \frac{\overline{X}_{16} - 50}{1} \leq \frac{50 + a - 50}{1}\right) =$$
$$= P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1 = 0{,}9876 \rightarrow P(Z \leq a) = 0{,}9938 \rightarrow a = 2{,}5$$

055 La edad a la que contraen matrimonio los hombres de una ciudad es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 30 años y desviación típica de 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 200 hombres de dicha ciudad.

Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

a) $\overline{X} \equiv N\left(30; \dfrac{4}{\sqrt{200}}\right) = N(30; 0{,}28) \rightarrow \begin{cases} \mu = 30 \\ \sigma^2 = 0{,}08 \end{cases}$

b) $P(36 < \overline{X} < 37) = P\left(\dfrac{36 - 30}{0{,}28} < \dfrac{\overline{X} - 30}{0{,}28} < \dfrac{37 - 30}{0{,}28}\right) = P(21{,}43 < Z < 25) = 0$

056 Se supone que el peso de las chicas de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 de estas chicas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

$$\overline{X} \equiv N\left(64; \frac{6}{\sqrt{144}}\right) = N(64; 0{,}5)$$

$$P(\overline{X} \geq 63) = P\left(\frac{\overline{X} - 64}{0{,}5} \geq \frac{63 - 64}{0{,}5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$$

057 El sueldo de los trabajadores de una multinacional sigue una distribución normal de media $\mu = 2.500$ € y desviación típica $\sigma = 600$ €.

Si se toma una muestra de 64 trabajadores:

a) ¿De qué tipo es la distribución de las medias de las muestras que pueden extraerse?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea menor que 2.350 €?

(La Rioja. Junio 2008. Parte C. Problema 2)

a) La distribución de las medias es una distribución normal:

$$\overline{X} \equiv N\left(2.500,\ \frac{600}{\sqrt{64}}\right) = N(2.500,\ 75)$$

b) $P(\overline{X} < 2.350) = P\left(\dfrac{\overline{X} - 2.500}{75} < \dfrac{2.350 - 2.500}{75}\right) = P(Z < -2) =$

$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

058 Se han tomado las tallas de 16 bebés elegidos al azar, entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

50	49	49	50	52	49	47	46
48	50	49	50	50	48	47	50

La talla de los bebés sigue una distribución normal tal que:

- Su desviación típica es conocida y vale 3 centímetros.
- Su media coincide con la media de la muestra.

¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

En la muestra: $\overline{x} = 49$

Así tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(49;\ \dfrac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(49;\ 0{,}75)$

059 El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley normal de media 9 horas y desviación típica 4.
Para muestras de 64 adolescentes:

a) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7,8 y 9,5 horas.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(9;\ \dfrac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(9;\ 0{,}5)$

b) $P(7{,}8 < \overline{X} < 9{,}5) = P\left(\dfrac{7{,}8 - 9}{0{,}5} < \dfrac{\overline{X} - 9}{0{,}5} < \dfrac{9{,}5 - 9}{0{,}5}\right) = P(-2{,}4 < Z < 1) =$

$= P(Z < 1) - P(Z \leq -2{,}4) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 2{,}4)] =$

$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}9918 = 0{,}8331$

060 El tiempo, en horas mensuales, que los jubilados dedican a pasear se distribuye según una normal de media 60 horas y desviación típica 20.
Para muestras de 36 jubilados:

a) Indica cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) Halla la probabilidad de que la media de una de las muestras elegida esté comprendida entre 59 y 62 horas.

a) $\overline{X} \equiv N\left(60;\ \dfrac{20}{\sqrt{36}}\right) = N(60;\ 3{,}33)$

b) $P(59 < \overline{X} < 62) = P\left(\dfrac{59-60}{3{,}33} < \dfrac{\overline{X}-60}{3{,}33} < \dfrac{62-60}{3{,}33}\right) = P(-0{,}3 < Z < 0{,}6) =$

$= P(Z < 0{,}6) - P(Z \leq -0{,}3) = P(Z < 0{,}6) - [1 - P(Z < 0{,}3)] =$

$= 0{,}7257 - 1 + 0{,}6179 = 0{,}3436$

061 Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene de media 37 °C y de desviación típica 0,85 °C.

Se elige una muestra de 105 personas y se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura media sea menor de 36,9 °C.

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura media esté comprendida entre 36,5 °C y 37,5 °C.

(Murcia. Junio 2005. Bloque 5. Cuestión 2)

$\overline{X} \equiv N\left(37;\ \dfrac{0{,}85}{\sqrt{105}}\right) = N(37;\ 0{,}08)$

a) $P(\overline{X} < 36{,}9) = P\left(\dfrac{\overline{X}-37}{0{,}08} < \dfrac{36{,}9-37}{0{,}08}\right) = P(Z < -1{,}25) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

b) $P(36{,}5 < \overline{X} < 37{,}5) = P\left(\dfrac{36{,}5-37}{0{,}08} < \dfrac{\overline{X}-37}{0{,}08} < \dfrac{37{,}5-37}{0{,}08}\right) =$

$= P(-6{,}25 < Z < 6{,}25) = 1$

062 Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4{,}8}{\sqrt{16}}\right) = N(36;\ 1{,}2)$

$P(\overline{X} > 35) = P\left(\dfrac{\overline{X}-36}{1{,}2} > \dfrac{35-36}{1{,}2}\right) = P(Z > -0{,}83) = P(Z < 0{,}83) = 0{,}7967$

b) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4{,}8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;\ 0{,}96)$

$P(34 < \overline{X} < 36) = P\left(\dfrac{34-36}{0{,}96} < \dfrac{\overline{X}-36}{0{,}96} < \dfrac{36-36}{0{,}08}\right) = P(-2{,}08 < Z < 0) =$

$= P(Z < 0) - P(Z \leq -2{,}08) = P(Z < 0) - [1 - P(Z < 2{,}08)] =$

$= 0{,}5 - 1 + 0{,}9812 = 0{,}4812$

063 El coeficiente intelectual de los individuos presentes en una sala de conferencias puede suponerse que sigue una distribución normal cuya media es μ y sabiendo que su varianza es igual a 121.

a) ¿Cuánto vale μ si sabemos que solo un 10 % de las personas en la sala sobrepasa un coeficiente intelectual de 109?

En los dos siguientes apartados supondremos que $\mu = 95$.

b) Elegida una persona al azar de la sala, ¿cuál es la probabilidad de que su coeficiente intelectual esté entre 92 y 98?

c) Si elegimos al azar 16 personas de la sala y calculamos la media de sus coeficientes intelectuales, ¿cuál es la probabilidad de que esa media esté entre 92 y 98?

a) $X \equiv N(\mu, \sqrt{121}) = N(\mu, 11)$

$$P(X > 109) = P\left(\frac{X-\mu}{11} > \frac{109-\mu}{11}\right) = P\left(Z > \frac{109-\mu}{11}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{109-\mu}{11}\right) = 0{,}1$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{109-\mu}{11}\right) = 0{,}9 \rightarrow \frac{109-\mu}{11} = 1{,}29 \rightarrow \mu = 94{,}81$$

b) $X \equiv N(95, 11)$

$$P(92 < \overline{X} < 98) = P\left(\frac{92-95}{11} < \frac{\overline{X}-95}{11} < \frac{98-95}{11}\right) = P(-0{,}27 < Z < 0{,}27) =$$

$$= 2P(Z < 0{,}27) - 1 = 2 \cdot 0{,}6064 - 1 = 0{,}2128$$

c) $\overline{X} \equiv N\left(95; \frac{11}{\sqrt{16}}\right) = N(95; 2{,}75)$

$$P(92 < \overline{X} < 98) = P\left(\frac{92-95}{2{,}75} < \frac{\overline{X}-95}{2{,}75} < \frac{98-95}{2{,}75}\right) = P(-1{,}09 < Z < 1{,}09) =$$

$$= 2P(Z < 1{,}09) - 1 = 2 \cdot 0{,}8621 - 1 = 0{,}7242$$

064 La tabla indica la estatura de una muestra formada por 40 chicas de una localidad donde la altura media sigue una distribución normal con desviación típica 0,12 m.

Estatura (m)	Chicas
[1,50; 1,55)	2
[1,55; 1,60)	5
[1,60; 1,65)	10
[1,65; 1,70)	12
[1,70; 1,75)	6
[1,75; 1,80)	10

¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de un grupo de 36 chicas, elegidas al azar, de la misma localidad tenga una media de estatura mayor que 1,64 m?

$$\overline{x} = \frac{1{,}525 \cdot 2 + 1{,}575 \cdot 5 + 1{,}625 \cdot 10 + 1{,}675 \cdot 12 + 1{,}725 \cdot 6 + 1{,}775 \cdot 5}{40} = 1{,}6625$$

Entonces, resulta que: $\overline{X} \equiv N\left(1{,}66;\ \frac{0{,}12}{\sqrt{40}}\right) = N(1{,}66;\ 0{,}02)$

$$P(\overline{X} > 1{,}64) = P\left(\frac{\overline{X} - 1{,}66}{0{,}02} > \frac{1{,}64 - 1{,}66}{0{,}02}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$$

065 **El consumo medio de carne de los leones de la sabana es de 10 kg con una desviación típica de 3 kg. Elegida una muestra al azar de 49 leones, ¿cuál es la probabilidad de que su consumo medio diario de carne sea inferior a 8,5 kg?**

$$\overline{X} \equiv N\left(10;\ \frac{3}{\sqrt{49}}\right) = N(10;\ 0{,}43)$$

$$P(\overline{X} < 8{,}5) = P\left(\frac{\overline{X} - 10}{0{,}43} < \frac{8{,}5 - 10}{0{,}43}\right) = P(Z < -3{,}49) = 1 - P(Z \leq 3{,}49) =$$
$$= 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002$$

066 **De una población con distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño *n* y se calcula su media muestral. ¿Qué valor debe tener *n* para que se cumpla la desigualdad $|\overline{x} - \mu| < 2$, con una probabilidad de 0,95?**

(Madrid. Septiembre 2002. Opción B. Ejercicio 4)

$$\overline{X} \equiv N\left(50;\ \frac{6}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(|\overline{X} - \mu| < 2) = P(-2 < \overline{X} - 50 < 2) = P\left(\frac{-2}{\frac{6}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{X} - 50}{\frac{6}{\sqrt{n}}} < \frac{2}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right) =$$
$$= P\left(\frac{-\sqrt{n}}{3} < Z < \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 2P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 = 0{,}95$$
$$\rightarrow P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0{,}975 \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} = 1{,}96 \rightarrow n = 34{,}57$$

La población debe tener como mínimo 35 elementos.

067 **En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías. Si la media poblacional es $\mu = 1.600$ calorías y se elige al azar una muestra aleatoria de 100 personas de esa población, determinar la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1.550 y 1.660 calorías.**

(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Ejercicio 2)

$$\overline{X} \equiv N\left(1.600,\ \frac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(1.600,\ 40)$$

$$P(1.550 < \overline{X} < 1.660) = P\left(\frac{1.550 - 1.600}{40} < \frac{\overline{X} - 1.600}{40} < \frac{1.660 - 1.600}{40}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z \leq -1{,}25) =$$

$$= P(Z < 1{,}5) - [1 - P(Z < 1{,}25)] =$$

$$= 0{,}9332 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8276$$

068 En cierta población humana, la media muestral $\overline{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\overline{X}$ sea menor o igual que 80 es 0,63 y la de que $\overline{X}$ sea mayor que 90 es 0,02. Hallar la media y la desviación típica de la media muestral $\overline{X}$ sabiendo que el tamaño muestral es $n = 121$.

$$\overline{X} \equiv N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{121}}\right) = N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{11}\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 80) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{11}} \leq \frac{80 - \mu}{\frac{\sigma}{11}}\right) = P\left(Z \leq \frac{11(80 - \mu)}{\sigma}\right) = 0{,}63 \rightarrow \frac{11(80 - \mu)}{\sigma} = 0{,}34$$

$$P(\overline{X} > 90) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{11}} > \frac{90 - \mu}{\frac{\sigma}{11}}\right) = P\left(Z > \frac{11(90 - \mu)}{\sigma}\right) = 0{,}02$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{11(90 - \mu)}{\sigma}\right) = 0{,}98 \rightarrow \frac{11(90 - \mu)}{\sigma} = 2{,}06$$

Resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 11(80 - \mu) = 0{,}34\sigma \\ 11(90 - \mu) = 2{,}06\sigma \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 11\mu + 0{,}34\sigma = 880 \\ 11\mu + 2{,}06\sigma = 990 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 78{,}02 \\ \sigma = 63{,}95 \end{array}\right.$$

069 Para una población determinada, la proporción dada por una variable aleatoria es de 0,8. Determina las distribuciones muestrales de la proporción en las muestras de tamaño:

a) 20 b) 64 c) 400

a) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{20}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}09)$

b) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{64}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}05)$

c) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}02)$

070 El 4 % de los envases de un determinado producto contiene menos elementos de los que anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado al azar una muestra de 400 envases.

a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de envases incompletos de la muestra?

b) Halla la probabilidad de que en la muestra se encuentren 88 envases con menos elementos de los anunciados.

a) $\hat{P} \equiv N\left(0,04;\ \sqrt{\dfrac{0,04 \cdot 0,96}{400}}\right) = N(0,04;\ 0,01)$

b) $P\left(\hat{P} \geq \dfrac{88}{400}\right) = P(\hat{P} \geq 0,22) = P\left(\dfrac{\hat{P} - 0,04}{0,01} \geq \dfrac{0,22 - 0,04}{0,01}\right) = P(Z \geq 18) = 0$

071 En un sondeo electoral, uno de los partidos obtiene una proporción de 0,56 de los posibles votos.

Calcula la probabilidad de que, de 1.000 votantes elegidos aleatoriamente, 480 tengan intención de votar a este partido.

$$\hat{P} \equiv N\left(0,56;\ \sqrt{\dfrac{0,56 \cdot 0,44}{1.000}}\right) = N(0,56;\ 0,016)$$

$$P\left(\hat{P} \geq \dfrac{480}{1.000}\right) = P(\hat{P} \geq 0,48) = P\left(\dfrac{\hat{P} - 0,56}{0,016} \geq \dfrac{0,48 - 0,56}{0,016}\right) = P(Z \geq -5) = 1$$

072 En una página web se ha realizado una encuesta para conocer la opinión de los internautas sobre la calidad de sus contenidos. Han participado 2.400 personas y 1.150 se han mostrado satisfechas con los mismos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 50 internautas:

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de internautas satisfechos?

b) Halla la probabilidad de que en la muestra más de 27 personas se manifiesten satisfechas con sus contenidos.

c) Si se toman 100 muestras del mismo tamaño, ¿en cuántas de ellas se puede esperar que haya entre 28 y 30 internautas satisfechos?

a) $P = \dfrac{1.150}{2.400} = 0,48$

$$\hat{P} \equiv N\left(0,48;\ \sqrt{\dfrac{0,48 \cdot 0,52}{50}}\right) = N(0,48;\ 0,07)$$

b) $P\left(\widehat{P} > \dfrac{27}{50}\right) = P(\widehat{P} > 0{,}54) = P\left(\dfrac{\widehat{P} - 0{,}48}{0{,}07} > \dfrac{0{,}54 - 0{,}48}{0{,}07}\right) =$

$= P(Z > 0{,}86) = 1 - P(Z \leq 0{,}86) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949$

c) $P\left(\dfrac{28}{50} < \widehat{P} < \dfrac{30}{50}\right) = P(0{,}56 < \widehat{P} < 0{,}6) =$

$= P\left(\dfrac{0{,}56 - 0{,}48}{0{,}07} < \dfrac{\widehat{P} - 0{,}48}{0{,}07} < \dfrac{0{,}6 - 0{,}48}{0{,}07}\right) =$

$= P(1{,}14 < Z < 1{,}71) = P(Z < 1{,}71) - P(Z < 1{,}14) =$

$= 0{,}9564 - 0{,}8729 = 0{,}0835$

$100 \cdot 0{,}0835 = 8{,}35 \rightarrow$ Se puede esperar que en 8 muestras haya entre 28 y 30 internautas satisfechos.

073 Una agencia de viajes ha comprobado que el 4 % de sus clientes prefieren los paquetes vacacionales que incluyen un crucero.

Para la elaboración de los próximos catálogos publicitarios se han publicado 500 ejemplares de muestra distribuidos al azar entre los clientes habituales de la agencia.

a) ¿Cuál es el número esperado de clientes que solicitarán un paquete vacacional con crucero?

b) Determina la distribución de la proporción de clientes que elegirán un paquete vacacional que incluya un crucero.

a) $0{,}04 \cdot 500 = 20$ clientes se espera que soliciten un paquete vacacional con crucero.

b) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}04;\ \sqrt{\dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{500}}\right) = N(0{,}04;\ 0{,}0087)$

074 Un jugador de baloncesto encesta seis de cada diez de sus lanzamientos a canasta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 120 tiros a canasta consiga encestar más de 84?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de aciertos sea menor que 60?

c) Halla la probabilidad de que la proporción de aciertos sea el doble que la proporción de fallos.

d) ¿Cuál es la distribución de la proporción muestral de la variable que cuenta los errores al lanzar en lugar de los aciertos?

$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}6;\ \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{120}}\right) = N(0{,}6;\ 0{,}045)$

a) $P\left(\widehat{P} > \dfrac{84}{120}\right) = P(\widehat{P} > 0{,}7) = P\left(\dfrac{\widehat{P} - 0{,}6}{0{,}045} > \dfrac{0{,}7 - 0{,}6}{0{,}045}\right) = P(Z > 2{,}22) =$

$= 1 - P(Z \leq 2{,}22) = 1 - 0{,}9868 = 0{,}0132$

b) $P\left(\widehat{P} < \frac{60}{120}\right) = P(\widehat{P} < 0{,}5) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0{,}6}{0{,}045} > \frac{0{,}5 - 0{,}6}{0{,}045}\right) = P(Z > -2{,}22) =$

$= P(Z < 2{,}22) = 0{,}9868$

c) $P\left(\widehat{P} \geq \frac{80}{120}\right) = P(\widehat{P} \geq 0{,}67) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0{,}6}{0{,}045} < \frac{0{,}67 - 0{,}6}{0{,}045}\right) = P(Z \geq 1{,}56) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$

d) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}4;\ \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{120}}\right) = N(0{,}4;\ 0{,}045)$

075 **Una máquina produce componentes electrónicos para la fabricación de teléfonos móviles. Se ha comprobado que el 2 % son defectuosos. Determina la distribución de la proporción de componentes defectuosos que aparecerán en una caja de 250 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 4 y 6 componentes defectuosos en una caja del mismo tamaño?**

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}02;\ \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{250}}\right) = N(0{,}02;\ 0{,}0089)$$

$$P\left(\frac{4}{250} < \widehat{P} < \frac{6}{250}\right) = P(0{,}016 < \widehat{P} < 0{,}024) =$$

$$= P\left(\frac{0{,}016 - 0{,}02}{0{,}0089} < \frac{\widehat{P} - 0{,}02}{0{,}0089} < \frac{0{,}024 - 0{,}02}{0{,}0089}\right) =$$

$$= P(-0{,}45 < Z < 0{,}45) = 2P(Z < 0{,}45) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}6736 - 1 = 0{,}3472$$

076 **Se ha realizado un estudio para conocer la efectividad de una vacuna, obteniéndose que en un 93 % de los casos la enfermedad no se contagió. Si se toma una muestra de 500 individuos vacunados, ¿cuál es la distribución de la proporción de personas inmunes a la enfermedad en dicha muestra? ¿Qué probabilidad hay de que se contagien más de 30 personas en la muestra anterior?**

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}93;\ \sqrt{\frac{0{,}93 \cdot 0{,}07}{500}}\right) = N(0{,}93;\ 0{,}011)$$

$$P\left(\widehat{P} < \frac{470}{500}\right) = P(\widehat{P} < 0{,}94) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0{,}93}{0{,}011} < \frac{0{,}94 - 0{,}93}{0{,}011}\right) = P(Z < 0{,}91) = 0{,}8186$$

077 **Para la realización de un cultivo se introducen 100.000 bacterias en un recipiente. De ellas, 87.500 son de un tipo y el resto de otro.**
Determina la distribución de la proporción de bacterias del primer tipo que se encontrarán en una muestra formada por la cuarta parte de las bacterias del cultivo inicial.

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}875;\ \sqrt{\frac{0{,}875 \cdot 0{,}125}{25.000}}\right) = N(0{,}875;\ 0{,}002)$$

078 Halla la probabilidad de que, en 100 lanzamientos de una moneda, el número de cruces sea mayor que 55. ¿Cuál es la probabilidad si se efectúan 225 lanzamientos? ¿Por qué al aumentar el tamaño de la muestra aumenta la probabilidad?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,5;\ \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}\right) = N(0,5;\ 0,05)$$

$$P\left(\widehat{P} > \frac{55}{100}\right) = P(\widehat{P} > 0,55) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0,5}{0,05} > \frac{0,55 - 0,5}{0,05}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,5;\ \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{225}}\right) = N(0,5;\ 0,03)$$

$$P\left(\widehat{P} > \frac{55}{225}\right) = P(\widehat{P} > 0,24) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0,5}{0,03} > \frac{0,24 - 0,5}{0,03}\right) = P(Z > -8,67) = 1$$

Al aumentar el tamaño de la muestra la proporción que corresponde a 55 cruces es menor; por tanto, la probabilidad que resulta es mayor.

079 Se sabe que el 10 % de los habitantes de una determinada ciudad va regularmente al teatro.

Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos el 13 % de ellos vaya regularmente al teatro?

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 8)

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,1;\ \sqrt{\frac{0,13 \cdot 0,87}{100}}\right) = N(0,1;\ 0,03)$$

$$P(\widehat{P} \ge 0,13) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0,1}{0,03} \ge \frac{0,13 - 0,1}{0,03}\right) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z < 1) =$$

$$= 1 - 0,8413 = 0,1587$$

080 Se sabe que el 40 % de las mujeres embarazadas dan a luz antes de la fecha prevista. En un hospital, han dado a luz 125 mujeres en una semana.

a) ¿Cuál es el número esperado de mujeres a las que se les retrasó el parto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 45 y 60 mujeres se les haya adelantado el parto?

(Canarias. Septiembre 2004. Prueba B. Pregunta 2)

a) $0{,}6 \cdot 125 = 75$ mujeres se espera que tengan retraso en el parto.

b) $$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}4;\ \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{125}}\right) = N(0{,}4;\ 0{,}044)$$

$$P\left(\frac{45}{125} < \widehat{P} < \frac{60}{125}\right) = P(0{,}36 < \widehat{P} < 0{,}48) =$$
$$= P\left(\frac{0{,}36 - 0{,}4}{0{,}044} < \frac{\widehat{P} - 0{,}4}{0{,}044} < \frac{0{,}48 - 0{,}4}{0{,}044}\right) =$$
$$= P(-0{,}91 < Z < 1{,}82) = P(Z < 1{,}82) - [1 - P(Z < 0{,}91)] =$$
$$= 0{,}9656 - 1 + 0{,}8186 = 0{,}7842$$

081 Si dos poblaciones se distribuyen mediante distribuciones normales con medias 24 y 28 y desviaciones típicas 1 y 2, respectivamente, ¿cuál es la distribución de las diferencias de las medias muestrales para muestras de tamaño 25 extraídas de estas poblaciones? ¿Y si las muestras son de tamaño 36?

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(28 - 24;\ \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}}\right) = N(4;\ 0{,}45)$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(28 - 24;\ \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{36}}\right) = N(4;\ 0{,}37)$$

082 La duración de las llamadas de teléfono, en dos departamentos de atención al cliente, sigue una distribución normal con desviación típica de 6 minutos en el primero y de 7 minutos en el segundo. Con el fin de estimar la diferencia de medias, se elige una muestra aleatoria compuesta por 42 llamadas del primer departamento y 38 del segundo. Si se anotan los tiempos medios de conversación en cada departamento y se obtienen 16 y 14 minutos, respectivamente, ¿cuál es la distribución para la diferencia de medias muestrales?

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(16 - 14;\ \sqrt{\frac{36}{42} + \frac{49}{38}}\right) = N(2;\ 1{,}47)$$

083 El responsable de la sede central de una empresa afirma que las edades de sus empleados siguen una distribución normal con una media de 44 años y una varianza de 16 años al cuadrado. Y el responsable de una de las sucursales de la empresa en otro país ha determinado que sus empleados también tienen edades que se ajustan a una distribución normal con una media de 40 años y una varianza de 25 años al cuadrado.

Con el fin de hacer un estudio comparativo se seleccionan muestras de 25 personas en cada sede de la empresa.

a) Determina la distribución para la diferencia de las medias muestrales.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los empleados de la sede central tengan una media de edad al menos 2 años mayor que los de la sucursal extranjera?

a) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(44-40;\ \sqrt{\dfrac{16}{25}+\dfrac{25}{25}}\right) = N(4;\ 1{,}28)$

b) $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 2) = P\left(\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 4}{1{,}28} \geq \dfrac{2-4}{1{,}28}\right) = P(Z \geq -1{,}56) =$

$= P(Z \leq 1{,}56) = 0{,}9406$

084 Los resultados de una prueba de razonamiento realizada a los alumnos de una Comunidad Autónoma siguen una distribución normal con media 5,8 puntos y desviación típica 1,2; mientras que los de otra Comunidad han obtenido una puntuación media de 5,6 puntos con desviación típica 1,3. Se ha seleccionado al azar un grupo de 121 alumnos de la primera Comunidad y otro de 100 de la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia en las calificaciones medias de ambos grupos de alumnos sea superior a 0,4 puntos?

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(5{,}8-5{,}6;\ \sqrt{\frac{1{,}2^2}{121}+\frac{1{,}3^2}{100}}\right) = N(0{,}2;\ 0{,}17)$$

$$\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| > 0{,}4 \rightarrow \begin{cases} \overline{X}_1 - \overline{X}_2 < -0{,}4 \\ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 0{,}4 \end{cases}$$

$$P(\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| > 0{,}4) = P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < -0{,}4) + P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < -0{,}4) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 0{,}2}{0{,}17} > \frac{-0{,}4-0{,}2}{0{,}17}\right) + P\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 0{,}2}{0{,}17} > \frac{0{,}4-0{,}2}{0{,}17}\right) =$$

$$= P(Z < -3{,}53) + P(Z > 1{,}18) = 1 - P(Z \leq 3{,}53) + 1 - P(Z \leq 1{,}18) =$$

$$= 1 - 0{,}9998 + 1 - 0{,}8810 = 0{,}1192$$

085 Si dos poblaciones se distribuyen con medias 24 y 28 y desviaciones típicas 1 y 2, respectivamente, ¿cuál es la distribución de las diferencias de las medias muestrales para muestras de tamaños 36 y 49 respectivamente extraídas de estas poblaciones?

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(28-24;\ \sqrt{\frac{4}{49}+\frac{1}{36}}\right) = N(4;\ 0{,}33)$$

086 Las pruebas de control de calidad para un modelo *A* de bombilla han determinado que su duración se distribuye como una normal de media 4.000 horas y desviación típica 270 horas; mientras que para otro modelo *B* la duración media es de 3.900 horas y la desviación típica de 280 horas.

Si se toman muestras al azar de 50 bombillas de cada modelo:

a) ¿Cuáles son los parámetros de media y desviación típica de la diferencia de medias muestrales?

b) Halla la probabilidad de que la diferencia de medias de las duraciones de las bombillas de cada modelo sea inferior a 50 horas.

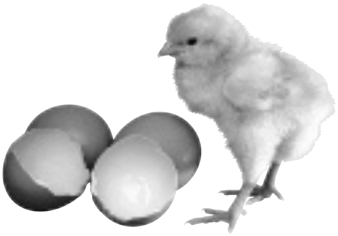
a) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(4.000-3.900;\ \sqrt{\dfrac{270^2}{50}+\dfrac{280^2}{50}}\right) = N(100;\ 55{,}01)$

b) $P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 50) = P\left(\dfrac{-50-100}{55{,}01} < \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 100}{55{,}01} < \dfrac{50-100}{55{,}01}\right) =$

$= P(-2{,}73 < Z < -0{,}91) = P(Z \leq 2{,}73) - P(Z \leq 0{,}91) =$

$= 0{,}9968 - 0{,}8186 = 0{,}1782$

087 El peso de los huevos de gallina producidos por una granja sigue una distribución normal de media 63 g y desviación típica 5 g.
En otra granja con otro tipo de alimentación se ha comprobado que el peso de los huevos corresponde a otra distribución normal de media 68 g y desviación típica 2 g.



a) Si se toman al azar muestras de 100 huevos de cada granja, determina la distribución para la diferencia de medias muestrales. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia en los pesos de los huevos sea menor de 4 g?

b) Di cuál es la probabilidad de que la diferencia en los pesos de los huevos sea menor de 4 g, en el caso de que las muestras sean de tamaños 81 y 49, respectivamente.

a) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(68 - 63;\ \sqrt{\dfrac{4}{100} + \dfrac{25}{100}}\right) = N(5;\ 0{,}54)$

$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 4) = P\left(\dfrac{-4-5}{0{,}54} < \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 5}{0{,}54} < \dfrac{4-5}{0{,}54}\right) =$

$= P(-16{,}67 < Z < -1{,}85) = 1 - P(Z \leq 1{,}85) =$

$= 1 - 0{,}9678 = 0{,}0322$

b) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(68 - 63;\ \sqrt{\dfrac{4}{49} + \dfrac{25}{81}}\right) = N(5;\ 0{,}62)$

$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 4) = P\left(\dfrac{-4-5}{0{,}62} < \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 5}{0{,}62} < \dfrac{4-5}{0{,}62}\right) =$

$= P(-14{,}51 < Z < -1{,}61) = 1 - P(Z \leq 1{,}61) =$

$= 1 - 0{,}9436 = 0{,}0564$

088 El tiempo que emplean las cajeras del turno de mañana de un supermercado en cobrar a los clientes sigue una distribución normal con media 4 minutos y desviación típica 0,5 minutos; mientras que para las cajeras del turno de tarde se ha comprobado que la media es de 5 minutos y la desviación típica es 0,3 minutos.

Para una muestra de 25 clientes que han acudido al supermercado por la mañana y para otra muestra de 30 clientes que lo han hecho por la tarde:

a) ¿Cuál es la distribución para la diferencia de medias muestrales?

b) Calcula la probabilidad de que la diferencia de tiempo medio dedicado por las cajeras del turno matinal respecto de las del turno de tarde sea inferior a medio minuto.

a) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(5-4;\ \sqrt{\dfrac{0,3^2}{30}+\dfrac{0,5^2}{25}}\right) = N(1;\ 0,11)$

b) $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 0,5) = P\left(\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1}{0,11} < \dfrac{0,5-1}{0,11}\right) = P(Z < -4,55) = 0$

089 Para determinar la influencia de una dieta pobre en calcio en la osteoporosis desarrollada en personas adultas, se realiza un estudio en dos regiones. Suponiendo que la toma de calcio en las poblaciones de afectados por la enfermedad se distribuye normalmente con medias de 840 y 900 mg, respectivamente, y desviaciones típicas de 150 y 120, halla la probabilidad de que la diferencia para las medias muestrales obtenidas en cada región no sea superior a 100 mg si se han seleccionado aleatoriamente 100 individuos de cada una.

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(900-840;\ \sqrt{\frac{120^2}{100}+\frac{150^2}{100}}\right) = N(60;\ 19,21)$$

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| \le 100) = P\left(\frac{-100-60}{19,21} \le \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 60}{19,21} \le \frac{100-60}{19,21}\right) =$$
$$= P(-8,32 \le Z \le 2,08) = 0,9812$$

090 En una prueba ciclista se considera la variable aleatoria: «Tiempo que tarda un corredor en recorrer una distancia de 42 kilómetros», y se comprueba que en uno de los equipos el tiempo medio de realización es de 54 minutos con una desviación típica de 4 minutos, mientras que en otro la media es de 58 minutos y la desviación típica es de 2 minutos.

Se toman muestras aleatorias entre los miembros de ambos equipos formados por 5 y 6 ciclistas, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia en los tiempos medios de realización de la prueba sea menor de 2,5 minutos?

Como los tamaños de las muestras son inferiores a 30 suponemos que la distribución de la que proceden es una distribución normal, en cuyo caso tenemos que:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(58-54;\ \sqrt{\frac{2^2}{5}+\frac{4^2}{6}}\right) = N(4;\ 1,86)$$

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 2,5) = P\left(\frac{-2,5-4}{1,86} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 4}{1,86} < \frac{2,5-4}{1,86}\right) =$$
$$= P(-3,49 < Z < -0,81) = P(Z \le 3,49) - P(Z \le 0,81) =$$
$$= 0,9998 - 0,7910 = 0,2088$$

091 En el juzgado de una ciudad se presentaron el año pasado 7.500 denuncias y este año ha habido 1.500 más. Se van a seleccionar muestras aleatorias formadas por un 5 % y un 7 % de ellas, respectivamente.

Si sabe que el tiempo dedicado el año pasado al trámite de las denuncias sigue una distribución normal con media de 10 meses y desviación típica de 2 meses, y que este año los parámetros de la distribución han aumentado un 2 % cada uno, calcula la probabilidad de que la diferencia de tiempo medio invertido en los trámites judiciales de las muestras sea menor de 0,1 meses.

La muestra del año pasado estará formada por: $0{,}05 \cdot 7.500 = 375$ denuncias

Y la muestra de este año estará formada por: $0{,}07 \cdot (7.500 + 1.500) = 630$ denuncias

La distribución del año pasado es: $N(10;\ 2)$

Así, la distribución de este año es: $N(1{,}02 \cdot 10;\ 1{,}02 \cdot 2) = N(10{,}2;\ 2{,}04)$

Entonces: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(10{,}2 - 10;\ \sqrt{\dfrac{2{,}04^2}{630} + \dfrac{2^2}{375}}\right) = N(0{,}2;\ 0{,}13)$

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 0{,}1) = P\left(\frac{-0{,}1 - 0{,}2}{0{,}13} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 0{,}2}{0{,}13} < \frac{0{,}1 - 0{,}2}{0{,}13}\right) =$$
$$= P(-2{,}30 < Z < -0{,}77) = P(Z < 2{,}30) - P(Z \leq 0{,}77) =$$
$$= 0{,}9893 - 0{,}7794 = 0{,}2099$$

092 Para determinar la influencia de una campaña de publicidad en televisión se realiza un estudio en dos poblaciones: una población *A* con acceso a la publicidad y otra población *B* que no ve el anuncio. El gasto en el producto anunciado de ambas poblaciones se distribuye normalmente con medias de 63 € y 60 €, respectivamente, y desviaciones típicas de 10 € y 15 €.
Halla la probabilidad de que la diferencia de las medias muestrales, ambas de tamaño 16, obtenidas aleatoriamente de cada población no sea superior a 5 €.

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(63 - 60;\ \sqrt{\frac{10^2}{16} + \frac{15^2}{16}}\right) = N(3;\ 4{,}51)$$

$$P(|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| < 5) = P\left(\frac{-5 - 3}{4{,}51} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 3}{4{,}51} < \frac{5 - 3}{4{,}51}\right) = P(-1{,}77 < Z < 0{,}44) =$$
$$= P(Z < 0{,}44) - P(Z \leq -1{,}77) =$$
$$= P(Z < 0{,}44) - 1 + P(Z < 1{,}77) = 0{,}67 - 1 + 0{,}9616 = 0{,}6316$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \frac{4,8}{\sqrt{16}}\right) = N(36;\ 1,2)$

$$P(\overline{X} > 35) = P\left(\frac{\overline{X} - 36}{1,2} > \frac{35 - 36}{1,2}\right) = P(Z > -0,83) = P(Z < 0,83) = 0,7967$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \frac{4,8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;\ 0,96)$

$$P(34 < \overline{X} < 36) = P\left(\frac{34 - 36}{1,2} < \frac{\overline{X} - 36}{1,2} > \frac{36 - 36}{1,2}\right) = P(-1,67 < Z < 0) =$$
$$= P(Z < 1,67) - P(Z < 0) = 0,9525 - 0,5 = 0,4525$$

2 **Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:**

51	50	53	48
49	50	51	48
50	51	50	47
51	51	49	51

La talla de los bebés sigue una ley normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción B. Ejercicio 3)

En la muestra: $\overline{x} = 50$

Así tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(50;\ \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = N(50;\ 0,5)$

3 **a) Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.**

b) De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 3)

a) Hacemos un muestreo con reposición, es decir, es posible escoger el mismo elemento más de una vez.

Las muestras posibles son: {1, 1}, {1, 5}, {1, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}

La población formada por las medias muestrales es: {1, 3, 4, 5, 6, 7}

Su media es: $\overline{x} = 4,33$

Y su varianza es: $\sigma^2 = 3,92$

b) $\frac{n_1}{300} = \frac{n_2}{200} = \frac{30}{500} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = 12 \end{cases}$

Los estratos son, respectivamente: hombres y mujeres, y la muestra se compone de 18 hombres y 12 mujeres.

4 El peso de los bebés al nacer sigue una ley normal de media $\mu = 3.200$ gramos y desviación típica $\sigma = 312$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño pese más de 3,4 kg al nacer?

b) Para una muestra de 169 niños, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio sea menos que 3.150 gramos?

c) Encuentra el intervalo donde se encuentra el 95 % de todos los pesos medios de las muestras de 169 recién nacidos.

(La Rioja. Junio 2006. Parte C. Problema 2)

a) $X \equiv N(3.200,\ 312)$

$$P(X > 3.400) = P\left(\frac{X - 3.200}{312} > \frac{3.400 - 3.200}{312}\right) = P(Z > 0{,}64) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 0{,}64) = 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(3.200;\ \dfrac{312}{\sqrt{169}}\right) = N(3.200;\ 24)$

$$P(\overline{X} < 3.150) = P\left(\frac{\overline{X} - 3.200}{24} < \frac{3.150 - 3.200}{24}\right) = P(Z < -2{,}08) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$$

c) $0{,}95 = P(3.200 - k < \overline{X} < 3.200 + k) =$

$$= P\left(\frac{3.200 - k - 3.200}{24} < \frac{\overline{X} - 3.200}{24} < \frac{3.200 + k - 3.200}{24}\right) =$$
$$= P\left(\frac{-k}{24} < Z < \frac{k}{24}\right) = P\left(Z < \frac{k}{24}\right) - P\left(Z > \frac{-k}{24}\right) = 2P\left(Z < \frac{k}{24}\right) - 1$$
$$\to P\left(Z < \frac{k}{24}\right) = 0{,}975 \to \frac{k}{24} = 1{,}96 \to k = 47{,}04$$

El intervalo pedido es: (22 − 9,8; 22 + 9,8) = (12,2; 31,8)

5 En un test que mide ciertas habilidades específicas, las puntuaciones se distribuyen normalmente, con media 100 y desviación típica 25. El 20 % de puntuaciones más altas corresponde al grupo de los superdotados, y el 20 % de puntaciones más bajas al de los infradotados. Calcular las puntuaciones que delimitan los distintos grupos.

(País Vasco. Julio 2004. Apartado D. Ejercicio 1)

$X \equiv N(100,\ 25)$

$$P(X > a) = 0{,}2 \to P\left(\frac{X - 100}{25} > \frac{a - 100}{25}\right) = P\left(Z > \frac{a - 100}{25}\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 100}{25}\right) = 0{,}2 \to P\left(Z \leq \frac{a - 100}{25}\right) = 0{,}8$$
$$\to \frac{a - 100}{25} = 0{,}85 \to a = 121{,}25$$

$$P(X < b) = 0{,}2 \rightarrow P\left(\frac{X-100}{25} < \frac{b-100}{25}\right) = P\left(Z < \frac{b-100}{25}\right) = 0{,}2$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq -\frac{b-100}{25}\right) = 0{,}8 \rightarrow -\frac{b-100}{25} = 0{,}85 \rightarrow b = 78{,}75$$

El grupo de superdotados obtiene más de 121,25 puntos y el de los infradotados, menos de 78,75 puntos.

6 **La talla de los recién nacidos se distribuye normalmente, pero mientras que en la Comunidad Autónoma *A* la media es de 52 cm y la desviación típica de 3 cm, en la *B* la media es de 53 cm y la desviación típica de 5 cm.**

a) Hallar, en el primero de los casos, entre qué valores simétricos respecto a la media está el 50 % (central) de las tallas de los recién nacidos.

b) Determinar en cuál de las dos Comunidades es mayor la proporción de recién nacidos con talla superior a 50 cm.

(País Vasco. Junio 2005. Apartado D. Ejercicio 1)

a) $X \equiv N(52;\ 3)$

$$0{,}5 = P(52-k < X < 52+k) = P\left(\frac{52-k-52}{3} < \frac{X-52}{3} < \frac{52+k-52}{3}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-k}{3} < Z < \frac{k}{3}\right) = P\left(Z < \frac{k}{3}\right) - P\left(Z > \frac{-k}{3}\right) = 2P\left(Z < \frac{k}{3}\right) - 1$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{k}{3}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{k}{3} = 0{,}68 \rightarrow k = 2{,}04$$

La media de las tallas se encuentra entre: $52 - 2{,}04 = 49{,}96$ cm y $52 + 2{,}04 = 54{,}04$ cm.

b) En la Comunidad *A*:

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-52}{3} > \frac{50-52}{3}\right) = P(Z > -0{,}67) = P(Z < 0{,}67) = 0{,}7486$$

En la Comunidad *B*:

$$P(X' > 50) = P\left(\frac{X'-53}{5} > \frac{50-53}{5}\right) = P(Z > -0{,}6) = P(Z < 0{,}6) = 0{,}7257$$

Luego la Comunidad *A* tiene mayor proporción de recién nacidos con talla superior a 50 cm.

7 **Una máquina de envasado automático de refrescos vierte en cada lata una cantidad de refresco que puede suponerse que sigue una distribución normal de media $\mu = 32{,}5$ cl y desviación típica $\sigma = 0{,}5$ cl. El llenado de la lata se considera «incorrecto» si la cantidad de refresco vertido es inferior a 31,5 cl o superior a 34 cl.**

a) ¿Cuál es el porcentaje de llenados incorrectos para esta máquina?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el llenado de 3 latas con esa máquina todos los llenados sean correctos?

(Castilla y León. Septiembre 2005. Bloque B. Pregunta 3)

a) $X \equiv N(32{,}5;\ 0{,}5)$

$$P(X < 31{,}5) = P\left(\frac{X - 32{,}5}{0{,}5} < \frac{31{,}5 - 32{,}5}{0{,}5}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

$$P(X > 34) = P\left(\frac{X - 32{,}5}{0{,}5} > \frac{34 - 32{,}5}{0{,}5}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3) =$$
$$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

Los llenados incorrectos suponen el 2,41% de las latas.

b) Los sucesos son independientes, luego la probabilidad es el producto de las probabilidades.
La probabilidad de 3 latas correctas es: $0{,}9759^3 = 0{,}9294$