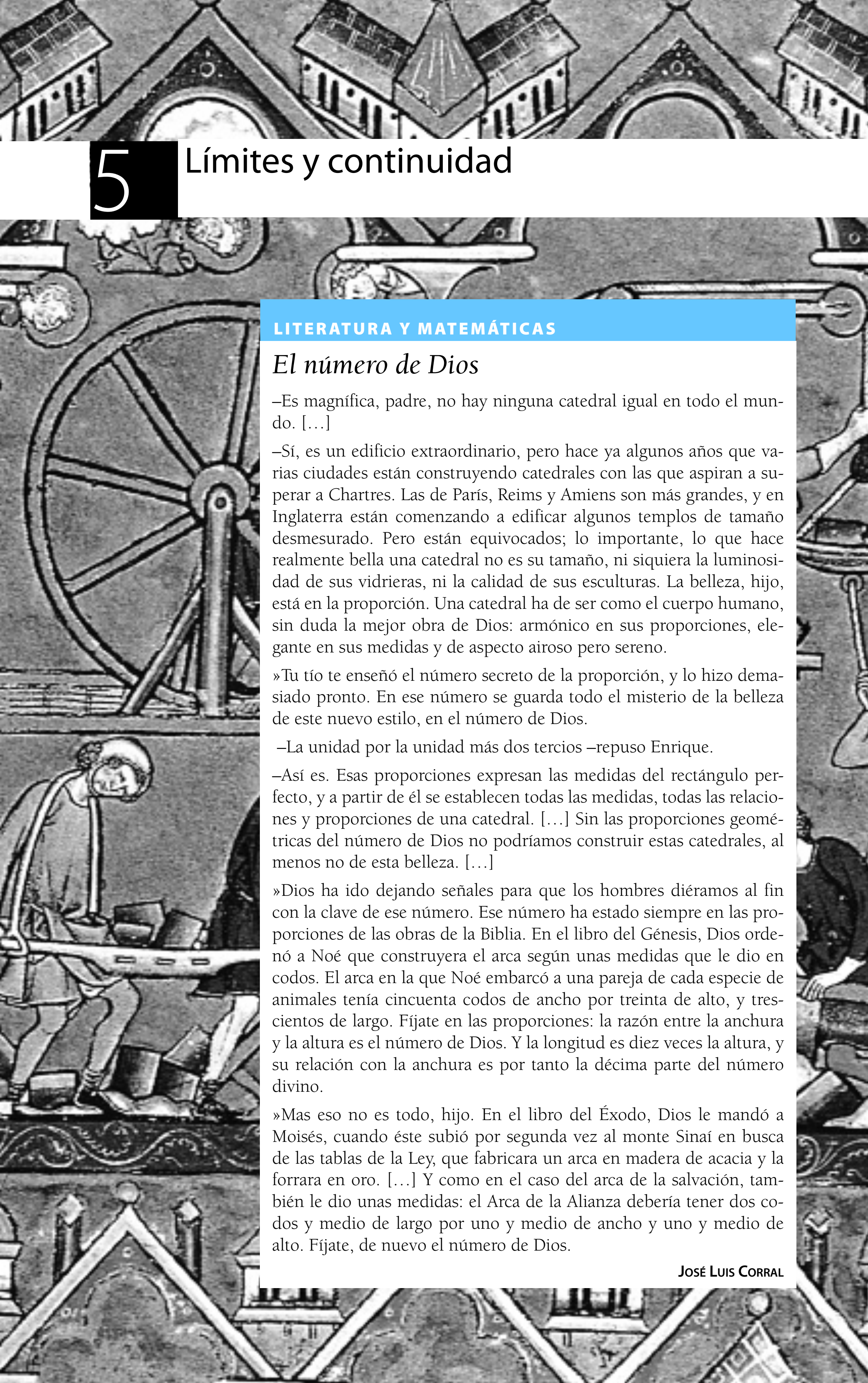


5 Límites y continuidad

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El número de Dios

–Es magnífica, padre, no hay ninguna catedral igual en todo el mundo. [...]

–Sí, es un edificio extraordinario, pero hace ya algunos años que varias ciudades están construyendo catedrales con las que aspiran a superar a Chartres. Las de París, Reims y Amiens son más grandes, y en Inglaterra están comenzando a edificar algunos templos de tamaño desmesurado. Pero están equivocados; lo importante, lo que hace realmente bella una catedral no es su tamaño, ni siquiera la luminosidad de sus vidrieras, ni la calidad de sus esculturas. La belleza, hijo, está en la proporción. Una catedral ha de ser como el cuerpo humano, sin duda la mejor obra de Dios: armónico en sus proporciones, elegante en sus medidas y de aspecto airoso pero sereno.

»Tu tío te enseñó el número secreto de la proporción, y lo hizo demasiado pronto. En ese número se guarda todo el misterio de la belleza de este nuevo estilo, en el número de Dios.

–La unidad por la unidad más dos tercios –repuso Enrique.

–Así es. Esas proporciones expresan las medidas del rectángulo perfecto, y a partir de él se establecen todas las medidas, todas las relaciones y proporciones de una catedral. [...] Sin las proporciones geométricas del número de Dios no podríamos construir estas catedrales, al menos no de esta belleza. [...]

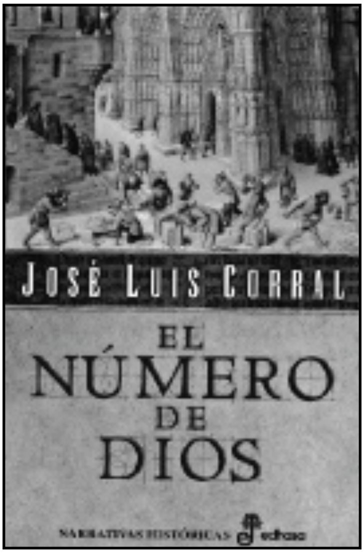
»Dios ha ido dejando señales para que los hombres diéramos al fin con la clave de ese número. Ese número ha estado siempre en las proporciones de las obras de la Biblia. En el libro del Génesis, Dios ordenó a Noé que construyera el arca según unas medidas que le dio en codos. El arca en la que Noé embarcó a una pareja de cada especie de animales tenía cincuenta codos de ancho por treinta de alto, y trescientos de largo. Fíjate en las proporciones: la razón entre la anchura y la altura es el número de Dios. Y la longitud es diez veces la altura, y su relación con la anchura es por tanto la décima parte del número divino.

»Mas eso no es todo, hijo. En el libro del Éxodo, Dios le mandó a Moisés, cuando éste subió por segunda vez al monte Sinaí en busca de las tablas de la Ley, que fabricara un arca en madera de acacia y la forrara en oro. [...] Y como en el caso del arca de la salvación, también le dio unas medidas: el Arca de la Alianza debería tener dos codos y medio de largo por uno y medio de ancho y uno y medio de alto. Fíjate, de nuevo el número de Dios.

JOSÉ LUIS CORRAL

El número de Dios

José Luis Corral



La novela se desarrolla en la Edad Media, en el siglo XIII. En su argumento se entrelazan varias historias relacionadas con el amor, con la lucha por el poder y, sobre todo, con la construcción de tres catedrales: la de Chartres, la de Burgos y la de León.

En el párrafo seleccionado, el maestro Juan de Rouen explica a su hijo Enrique los principios bíblicos en los que fundó las proporciones de la catedral de Chartres que acaba de construir.

–Únicamente falta que tuviera también esas proporciones el templo de Salomón –supuso Enrique.

–No. Ya lo he comprobado. El templo de Salomón tenía sesenta codos de largo, treinta de alto y veinte de ancho. No son las proporciones áureas, pues tomando esa anchura debería haber tenido treinta y tres codos de alto y sesenta y seis y medio de largo.

–¿Y entonces?

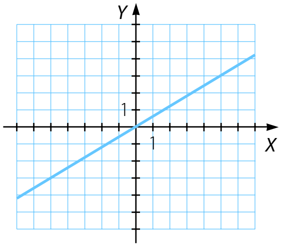
–No sé; en el libro Primero de los Reyes se dice que el rey Salomón decidió por su cuenta erigir un templo en Jerusalén en honor de Dios. A diferencia de las dos arcas, cuyas medidas fueron indicadas con precisión por el Señor, el templo lo edificó Salomón a su criterio. Y lo hizo empleando medidas más simples; humanas, podríamos decir. Utilizó la medida de la anchura del templo como referencia: así, para la longitud la multiplicó por tres, y en cuanto a la altura, le sumó a la anchura su mitad; sencillo, es decir, humano.

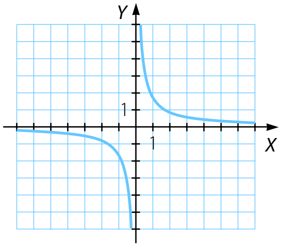
Esta novela es interesante por la visión que da de aquella época en paralelo a las historias humanas que desarrolla.

Escribe las expresiones algebraicas que corresponden a las funciones de proporcionalidad directa e inversa con la constante de proporcionalidad que describe el texto. Represéntalas gráficamente. ¿Qué diferencias existen entre las dos gráficas?

La constante de proporcionalidad es: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$

Así, las funciones de proporcionalidad son: $f(x) = \frac{5}{3}x$ y $g(x) = \frac{5}{3x}$



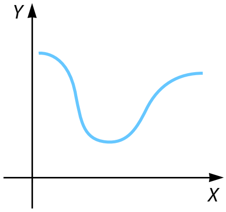


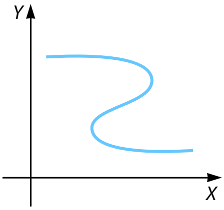
La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen de coordenadas, es una función continua y creciente. La función de proporcionalidad inversa es una hipérbola formada por dos ramas, no es continua en $x = 0$ y es decreciente en su dominio.

Límites y continuidad

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.**

a) 

b) 

a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b) La gráfica no corresponde a una función, porque existen valores de x a los que les corresponden más de un valor de y.

002 **Factoriza este polinomio:**

$$P(x) = 7x^5 + 14x^4 - 35x^3 - 42x^2$$

$P(x) = 7x^2(x - 2)(x + 1)(x + 3)$

003 **Determina la factorización de estos polinomios.**

a) $x^2 + 2x + 1$ c) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $x^2 - 4$ d) $9x^3 - 25x$

a) $(x + 1)^2$

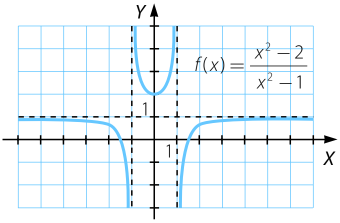
b) $(x - 2)(x + 2)$

c) $x^2(x - 1)^2$

d) $x(3x - 5)(3x + 5)$

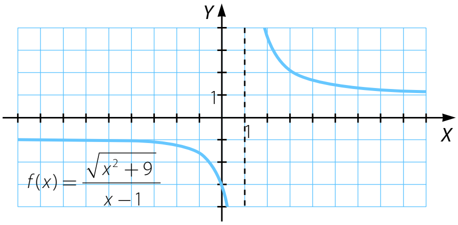
ACTIVIDADES

001 **Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.**



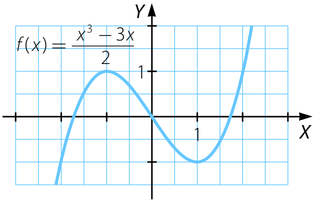
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

002 Determina si los límites en el infinito de esta función son finitos.



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x-1}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x-1}=1$$

003 Observa la gráfica y calcula los límites de la función en el infinito.



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x}{2}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x}{2}=+\infty$$

004 Busca funciones cuyos límites sean los siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ no existe.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ no existe.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x)=x^2-x+1$

b) $f(x)=x-x^2$

c) $f(x)=x^2+x-4$

d) $f(x)=x^3-x$

e) $f(x)=\cos x$

f) $f(x)=1-\operatorname{sen} 2x$

005 Determina el valor de las siguientes expresiones.

a) $2+(+\infty)$

b) $2+(-\infty)$

c) $2\cdot(+\infty)+(+\infty)$

d) $2\cdot(-\infty)\cdot(+\infty)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

006 Halla el valor de estas expresiones.

a) $2^{+\infty}+(+\infty)\cdot(+\infty)$

b) $2^{-\infty}+(-\infty)\cdot(-\infty)$

c) $(+\infty)^2+(+\infty)$

d) $(-\infty)^2\cdot(+\infty)$

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

007 Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, calcula:

a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{g(x)} = -\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = -1$

008 Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -5$, halla:

a) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{g(x)}$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)^{g(x)}$

a) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{g(x)}$ no existe.

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x)^{g(x)} = 0$

009 Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} x^7$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^7$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[7]{x}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[7]{x}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^7}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^7}$

a) $\lim_{x \to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

010 Calcula estos límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} 7^x$

b) $\lim_{x \to -\infty} 7^x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

d) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$

e) $\lim_{x \to +\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x \to -\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim_{x \to +\infty} 7^x = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} 7^x = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

e) $\lim_{x \to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

f) $\lim_{x \to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

011 Halla los límites en el infinito de cada una de estas funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^3$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^3 = 8$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \dfrac{3}{8}$

012 Completa $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\boxed{}}{2x^3 - x + 12}$, escribiendo en su numerador una función de modo que el resultado sea:

a) $+\infty$ b) 4 c) 0

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4+5}{2x^3 - x + 12} = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x}{2x^3 - x + 12} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x^3-3}{2x^3 - x + 12} = 4$

013 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}} = +\infty$

014 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x} = 1$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x} = \dfrac{7}{2}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3} = \dfrac{1}{2}$

015 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(2x-1)-(1+2x^2)x}{x(2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}=-\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x}{2x+\sqrt{1+4x}}=+\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)\to\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\frac{1}{2}$$

016 Sustituye *a*, *b*, *c* y *d* por números de modo que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=-\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=+\infty$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=$

$=\dfrac{a}{2}=1\rightarrow a=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+bx-3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx-3}{\sqrt{4x^2+bx-3}+2x}=\dfrac{b}{4}=-\dfrac{1}{4}\rightarrow b=-1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-cx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2+7}+cx}=0\rightarrow c=3$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{dx^2+x-5}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{dx^2+x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2+x-5}+2x}=+\infty\rightarrow d>4$

017 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}\rightarrow 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(2x-1)\right]}=e^2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}\rightarrow 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(-\frac{3}{x}\right)\cdot(6x+2)\right]}=e^{-18}=\dfrac{1}{e^{18}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}\rightarrow 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{4x-1}{4x}\right)\cdot(3x+2)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{4x}}=e^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}\rightarrow 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3(3x+1)}{x+3}}=e^{-9}=\dfrac{1}{e^9}$

018 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(x-1)\right]} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

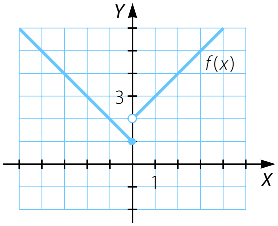
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x} = 0$

019 Observa la gráfica y calcula:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

siendo $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

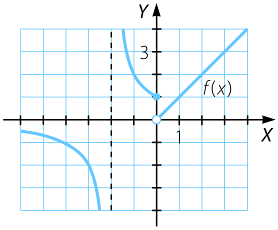


$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

020 Observa la gráfica y halla:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$



$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

021 Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$ en $x = 3$ y $x = -2$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{6}{5}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -2} f(x).$$

022 Determina el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{sen\ x}$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = 0$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x).$$

023 Resuelve los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{3x + 3}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{3x + 3} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{3(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x(x + 1)}{x(x - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{2(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{3}$$

024 Calcula estos límites.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5} \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{(5 + x)(5 - x)}}{-(5 - x)} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{5 + x}}{-\sqrt{5 - x}} = \frac{5}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 5^+} f(x) \text{ no existe} \end{array}\right\}$$

$$\to \text{No existe } \lim_{x \to 5} f(x).$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}} \to \frac{0}{0}$ $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{2(x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to 3} \left(2\sqrt{x^2 - 9}\right) = 0$

025 **Determina si la función $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ es continua en $x = -2$ y $x = 2$.**

$f(-2) = \dfrac{1}{0} \rightarrow$ No existe $f(-2) \rightarrow$ La función no es continua en $x = -2$.

$f(2) = \dfrac{5}{0} \rightarrow$ No existe $f(2) \rightarrow$ La función no es continua en $x = 2$.

026 **Halla si la función $f(x) = |x-3|$ es continua en $x = -3$ y $x = 0$.**

$f(-3) = |-6| = 6 \rightarrow$ Existe $f(-3)$.

$\lim\limits_{x \to -3} |x-3| = |-6| = 6 \rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.

$f(-3) = \lim\limits_{x \to -3} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = -3$.

027 **Determina si esta función es continua.**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- Si $x < -1 \rightarrow f(x) = x+1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- Si $x > -1 \rightarrow f(x) = x^2 - 3 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, +\infty)$.
- Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -1 + 1 = 0 \rightarrow$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 3) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito en este punto; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

028 **Calcula a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

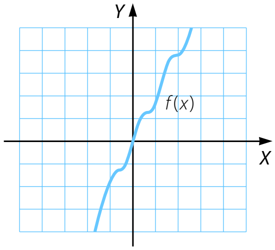
- Si $x < -2 \rightarrow f(x) = \dfrac{x+1}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -2)$.
- Si $x > -2 \rightarrow f(x) = -x^2 + a \rightarrow f(x)$ es continua en $(-2, +\infty)$.
- Si $x = -2 \rightarrow f(x) = \dfrac{-2+1}{-2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ Existe $f(-2)$.

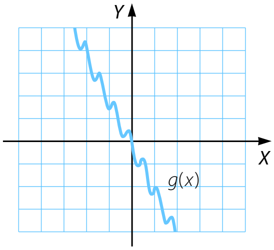
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-x^2 + a) = -4 + a$$

$f(x)$ es continua en $x = -2$ si:

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) \rightarrow \frac{1}{2} = -4 + a \rightarrow a = \frac{9}{2}$$

029 Observa las gráficas de estas funciones, y calcula:





a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

030 Resuelve los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

031 Halla los límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x-2}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x-2} = 0$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x-2} = 0$

032 Determina el límite de estas funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x+1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-5x+6)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3-x+x^2-x^3)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3-\dfrac{x-4}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{x-1}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)(2x-3)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3x-2}{x}$

a) $\lim_{x \to +\infty} (3x+1) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x+1} = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 6) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (3 - x + x^2 - x^3) = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{x-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} 2^{x-1} = +\infty$

g) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = 0$

h) $\lim_{x \to +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^0 = 1$

i) $\lim_{x \to -\infty} (x+3)(2x-3) = +\infty$

j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = +\infty$

033 Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8)$

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{2x^3+1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35}$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x-2}{3x^3 - 7x + 1}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4}$

a) $\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8) = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{2x^3+1} = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} = +\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35} = +\infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x-2}{3x^3 - 7x + 1} = 0$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4} = -\infty$

034 Determina los límites de estas funciones.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2-1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3+1}\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+5}{1-2x} : \frac{5x^3}{x^2+12}\right)$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2+3}{5x} + \frac{6x-x^2}{3x}\right)$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2-1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{24x^3 - 6x}{5x^4 + 5x} = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+5}{1-2x} : \frac{5x^3}{x^2+12}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 17x^2 + 60}{5x^3 - 10x^4} = -\frac{1}{10}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2+3}{5x} + \frac{6x-x^2}{3x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 30x + 9}{15x} = +\infty$

035 Halla los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 12x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x^2)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3)^x$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left((x^2 + 1)^2 + 4x\right)$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 4^x)$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 3^{-x})$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 12x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x^2) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3)^x = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} ((x^2 + 1)^2 + 4x) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 4^x) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x}\right) = -\infty$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1-x)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2-2x}{x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 3^{-x}) = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x}\right) \to -\infty + \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = 2$$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1-x} \to 1^{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1-x)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2+2x}{x}} = e^{2}$$

036 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{2x+6}{x^2-2x}\right)$$

(La Rioja. Septiembre 2008. Parte A. Cuestión 2)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{2x+6}{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{5x-2x-6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{x}=\frac{3}{2}$$

037 Los beneficios, en millones de euros, generados por el funcionamiento de una industria vienen dados en función del tiempo, en años, por:

$$b(t)=\frac{2t}{1+t^2}$$

¿Qué ocurre cuando pasan muchos años?

(Canarias. Septiembre 2007. Prueba B. Pregunta 4)

$\lim_{t\to +\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0 \rightarrow$ Cuando pasan muchos años, los beneficios se reducen a cero.

038 El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función:

$$f(t)=\frac{18+t^2}{(t+3)^2}$$

donde t es el tiempo medio en años desde $t=0$. Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo, cuando el tiempo tiende a ∞.

(La Rioja. Septiembre 2007. Parte A. Cuestión 3)

La población inicial es: $f(0)=\frac{18+0^2}{(0+3)^2}=2$ millones de individuos

$\lim_{t\to +\infty}\frac{18+t^2}{(t+3)^2}=1 \rightarrow$ A largo plazo, la población tiende a ser de un millón de individuos.

039 El número de flexiones por minuto que es capaz de hacer una persona que empieza su entrenamiento en un gimnasio, viene dado por la función:

$$f(x)=\frac{36x+8}{x+2}$$

siendo $x=$ «días de entrenamiento» y $f(x)=$ «número de flexiones».

¿Hacia qué valor se aproxima el número de flexiones cuando crece el número de días de entrenamiento?

(Canarias. Septiembre 2004. Prueba A. Pregunta 3)

$\lim_{x\to +\infty}\frac{36x+8}{x+2}=36$ flexiones

040 El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x)$ millones de euros, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si } 0\le x\le 5\\ \dfrac{5}{2x} & \text{si } x>5\end{cases}$$

Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 2)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{2x}=0\rightarrow$ Si la inversión se incrementa indefinidamente, la rentabilidad se reduce a cero.

041 La temperatura, en °C, de un objeto viene dada por la función:

$$f(t)=10\cdot\frac{2t^2+3t+4}{t^2+2t+5}$$

donde t es el tiempo en horas. Calcula la temperatura inicial, la temperatura cinco horas más tarde y la temperatura que puede alcanzar el objeto si se deja transcurrir mucho tiempo.

(La Rioja. Junio 2006. Parte A. Cuestión 3)

La temperatura inicial fue: $f(0)=10\cdot\dfrac{2\cdot 0^2+3\cdot 0+4}{0^2+2\cdot 0+5}=8$ °C

Cinco horas más tarde: $f(5)=10\cdot\dfrac{2\cdot 5^2+3\cdot 5+4}{5^2+2\cdot 5+5}=17{,}25$ °C

$\lim\limits_{t\to+\infty}10\cdot\dfrac{2t^2+3t+4}{t^2+2t+5}=20\rightarrow$ Si se deja transcurrir mucho tiempo, la temperatura tiende a ser de 20 °C.

042 Una empresa de transporte estima que sus ganancias, en miles de euros, durante los próximos años seguirán la fórmula:

$$g(t)=\frac{64.000+5.000t}{5t+5}$$

donde la variable $t=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ representa el tiempo en años medido a partir del presente. ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razona la respuesta.

(Canarias. Junio 2003. Prueba A. Pregunta 3)

$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{64.000+5.000t}{5t+5}=1.000\rightarrow$ Cuando el tiempo transcurre, las ganancias se estabilizan, y tienden a ser de un millón de euros.

043 Las ganancias de una empresa, en millones de euros, se ajustan a la función:

$$f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$$

donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$.
A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios?
En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

(Andalucía. Año 2001. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 2)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{50x - 100}{2x + 5} = 25 \rightarrow$ Los beneficios están limitados, ya que con el transcurso del tiempo tienden a estabilizarse en 25 millones de euros.

044 Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y calcula sus límites cuando x tiende a $-\infty$ y $+\infty$.

a) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$

b) $f(x) = \left|\dfrac{2x + 3}{x - 2}\right|$

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 2 - (-x + 2) & \text{si } x < -2 \\ x + 2 - (-x + 2) & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x + 2 - (x - 2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-4) = -4$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 = 4$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } x < -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } -\dfrac{3}{2} \leq x < 2 \\ \dfrac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{x - 2} = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 3}{x - 2} = 2$

045 La siguiente figura es la gráfica de la función $f(x)$.
Calcula el valor de estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

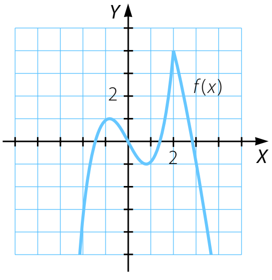
b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -0{,}9$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$

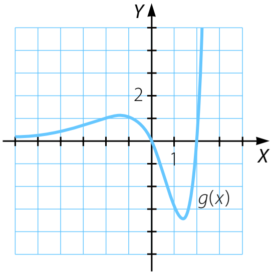
c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

046 Esta gráfica corresponde a la función $g(x)$.



Halla el valor de los límites.

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = 0{,}7$ c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ e) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -2{,}9$

b) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

047 Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{9}{10}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\dfrac{3}{2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

048 Dada $f(x) = 2^x$, determina:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2^3 = 8$ b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2^0 = 1$

049 Si tenemos la función $f(x) = \dfrac{6x-12}{x^2-3x-4}$, ¿cuáles serán sus límites cuando x tienda a 0, -1, 1 y 4?

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 3$$

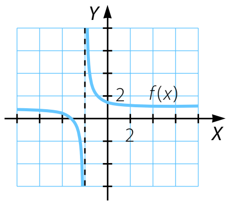
$$\lim_{x \to -1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{-18}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to -1} f(x).$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 1$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{12}{0} = \infty \to \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 4} f(x).$$

050 Observa las gráficas y determina los siguientes límites.

a)



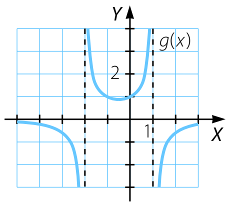
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -2^-} f(x)$

$\lim_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b)



$\lim_{x \to -\infty} g(x)$

$\lim_{x \to -2^-} g(x)$ $\quad \lim_{x \to -2^+} g(x)$

$\lim_{x \to 1^-} g(x)$ $\quad \lim_{x \to 1^+} g(x)$

$\lim_{x \to +\infty} g(x)$

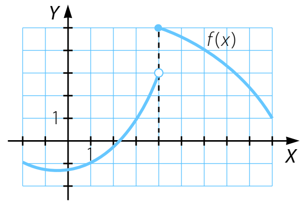
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

051 Observa la gráfica de la función $f(x)$.



Halla el valor de los límites.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 4^+} f(x)$

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$

052 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)^2}$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)^2} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)^2} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

053 Determina los límites y, en caso de resultar infinito, determina los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$ $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{3}{5}$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{-2}{0} = \infty$

$$\to \left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)} = -\infty \\ &\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

$\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$.

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = 0$

054 Con la función $f(x)=\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}$, halla:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=\dfrac{240}{90}=\dfrac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(x+1)(x+3)(x+7)}{x^2(x+7)}=$

$=\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x^2}=\dfrac{24}{49}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=\dfrac{21}{0}=\infty\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=1$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+11x^2+31x+21}{x^3+7x^2}=1$

055 Si $f(x)=\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^2+10x+21}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^2+10x+21}=\dfrac{108}{60}=\dfrac{9}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^2+10x+21}=\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x(x+3)^2}{(x+3)(x+7)}=\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x(x+3)}{x+7}=\dfrac{28}{0}=\infty$

$\to\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -7^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -7^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^2+10x+21}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x(x+3)}{x+7}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^2+10x+21}=0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = -\infty$

056 Dada $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{3}{x+5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, halla los límites.

a) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$
c) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
b) $\lim\limits_{x \to -5} g(x)$
d) $\lim\limits_{x \to 6} g(x)$
f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -5} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) = 24$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = 8 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) \to$ No existe $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to 6} g(x) = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{3}{x+5} = \dfrac{3}{11}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x+5} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$

057 Sea la función: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 4x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 2^{x+1} + 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to -5} h(x)$
c) $\lim\limits_{x \to 5} h(x)$
e) $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$
b) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$
d) $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

a) $\lim\limits_{x \to -5} h(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{4}{x-2} = -\dfrac{4}{7}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 4x + 4) = 16$

c) $\lim\limits_{x \to 5} h(x) = \lim\limits_{x \to 5} (2^{x+1} + 9) = 73$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{4}{x-2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x^2+4x+4) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} h(x)$

$\to$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$.

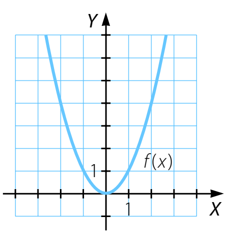
e) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2+4x+4) = 25 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2^{x+1}+9) = 25 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$

$\to \lim\limits_{x\to 3} h(x) = 25$

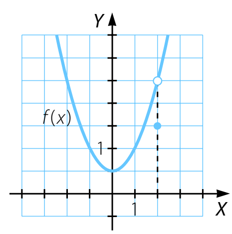
f) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (2^{x+1}+9) = +\infty$

058 **Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.**

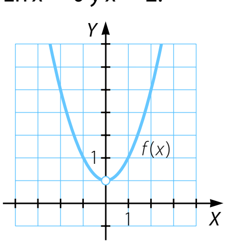
a) En $x = 0$ y $x = 2$.



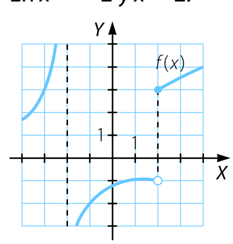
d) En $x = -1$ y $x = 2$.



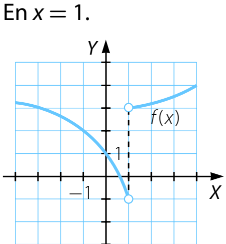
b) En $x = 0$ y $x = 2$.



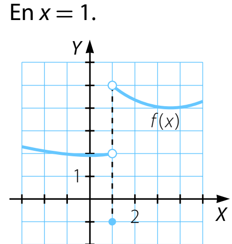
e) En $x = -2$ y $x = 2$.



c) En $x = 1$.



f) En $x = 1$.



a) • $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \to$ La función es continua en $x = 0$.

• $f(2) = 4 = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

b) • No existe $f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0{,}5 \to$ Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

• $f(2) = 2{,}5 = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

c) No existe $f(1)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

d) • $f(-1) = 1 = \lim\limits_{x\to -1} f(x) \to$ La función es continua en $x = -1$.

• $f(2) = 1{,}5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}5 \to$ Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad evitable.

e) • No existe $f(-2)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

• $f(2) = 3$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

059 **Estudia la continuidad en $x = -1$ y $x = 2$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4x - 1 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Clasifica los tipos de discontinuidades.

- $f(-1) = -4$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -5\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -4\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x).$$

La función no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = 11$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 11\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 13\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

060 **Estudia la continuidad de la función en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.**

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- No existe $g(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$$

La función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad evitable.

- $g(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = 2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} g(x).$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

061 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2004. Bloque 3. Ejercicio A)

- $f(0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x).$$

$f(0) = 2 = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

- $f(1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

$f(1) = 2 = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x = 1$.

062 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x \le 2\\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x > 2\end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en $x = 0$ y $x = 1$.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

- $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \to$ La función es continua en $x = 0$.
- $f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x\to 1} f(x).$$

$f(1) = 1 = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x = 1$.

063 Diga si la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4} - 8 & \text{si } 0 \le x \le 4\\ \sqrt{x^3} & \text{si } 4 < x\end{cases}$ es continua en $x = 4$.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

$f(4) = 8$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 8\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 8\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x\to 4} f(x).$$

$f(4) = 8 = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \to$ La función es continua en $x = 4$.

064 Completa la definición de la función para que sea continua en $x = 2$.

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2\\ \boxed{} & \text{si } x = 2\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2\end{cases}$$

La función es continua si: $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = p(2)$

Existe $\lim\limits_{x \to 2} p(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} p(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} p(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} p(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} p(x) = -1\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2} p(x) = -1$$

Entonces la función es continua si: $p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

065 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

demostrar que no es continua en $x = 5$.
¿Existe alguna función continua que coincida con $f(x)$ para todos los valores $x \neq 5$? En caso afirmativo, dar su expresión.

(Aragón. Junio 2001. Opción B. Cuestión 2)

$f(5) = 0$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$$

$f(5) \neq \lim\limits_{x \to 5} f(x) \to$ La función no es continua en $x = 5$.

Existe una función continua que coincide con $f(x)$ en $\mathbb{R} - \{5\}$, y su expresión es:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

066 **Dada la función:**

$$F(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x = 1$?

(Asturias. Junio 2000. Bloque 5)

La función es continua en $x = 1$ si: $\lim\limits_{x \to 1} F(x) = F(1)$

$F(1) = 2$

Existe $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = 3 - a\end{array}\right\} \to 2 = 3 - a \to a = 1$$

067 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcular los valores del parámetro a para los que $f(x)$ es continua en $x = 2$.

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 2)

La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$f(2) = 1$

Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \to 4 + 2a = 1 \to a = -\frac{3}{2}$$

068 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = -2$.

b) Estudie la continuidad de f cuando $a = 2$.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 2)

a) La función es continua en $x = -2$ si: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

$f(-2) = 4a - 2$

Existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 4a - 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = a \end{array}\right\} \to 4a - 2 = a \to a = \frac{2}{3}$$

b) Si $a = 2$: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- $f(-2) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 6 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(2) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x).$$

$f(2) = 2 = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to$ La función es continua en $x = 2$.

069 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \le -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Halla el valor de k para que la gráfica sea continua para $x = -1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 3. Ejercicio A)

La función es continua en $x = -1$ si: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

$f(-1) = 1$

Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = k \end{array}\right\} \to k = 1$$

070 Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \le 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Halle a y b para que la función sea continua en $x = 2$.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 2)

La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$f(2) = -1 + b$

Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1 + b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = a + 3 \end{array}\right\} \to -1 + b = a + 3 \to a = b - 4$$

071 Se considera la función definida a trozos mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad para todo valor de x en el que la función está definida.

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

- $f(-1) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -1} f(x).$$

Luego $f(x)$ no es continua en $x = -1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(3) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 8 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$$

Así, $f(x)$ no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto finito.

072 Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Estudie su continuidad.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

$f(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$f(1)=0=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x=1$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

073 Considere la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2-3x+2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Estudie la continuidad.

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 4)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$f(0)=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 0} f(x).$$

$f(0)=2=\lim\limits_{x\to 0} f(x) \to$ La función es continua en $x=0$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

074 Se considera la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+6 & \text{si } x\le 1 \\ -2x^2+8x-6 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Estudie la continuidad de *f*.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 2)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

$f(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$f(1)=0=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x=1$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

075 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad.

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

$f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

076 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudie su continuidad.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 2)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

$f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

$f(3) = 0 = \lim\limits_{x \to 3} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 3$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

077 Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudie la continuidad.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 5)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$f(0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

$f(0) = 2 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

078 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si } 1<x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

estudia su continuidad.

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1, 3\}$.

- $f(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$f(1)=0=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x=1$.

- $f(3)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 3} f(x).$$

$f(3)=0=\lim\limits_{x\to 3} f(x) \to$ La función es continua en $x=3$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

079 Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si } x\leq 2 \\ x^2-6x+10 & \text{si } 2<x<5 \\ 4x-15 & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$$

Estudie su continuidad.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 2)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{2, 5\}$.

- $f(2)=5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim_{x\to 2^+} f(x) \to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x=2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(5)=5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=5 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=5 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x) \to \text{Existe } \lim_{x\to 5} f(x).$$

$f(5)=5=\lim\limits_{x\to 5} f(x) \to$ La función es continua en $x=5$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

080 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}16-x^2 & \text{si } -2\le x<2\\ x^2 & \text{si } 2\le x\le 3\end{cases}$$

estudie la continuidad de *f*.

(Castilla-La Mancha. Junio 2002. Bloque 2. Ejercicio A)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $(-2, 2) \cup (2, 3)$.

$f(2) = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=12\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

081 Estudia la continuidad en el intervalo [0, 4] de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } 0\le x<1\\ x^3-6x^2+9x+1 & \text{si } 1\le x\le 4\end{cases}$$

(C. Valenciana. Junio 2008. Ejercicio A. Problema 3)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $(0, 1) \cup (1, 4)$.

$f(1) = 5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=5\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=5\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 1^-} f(x)= \lim_{x\to 1^+} f(x)\to \text{Existe } \lim_{x\to 1} f(x).$$

$f(1) = 5 = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \to$ La función es continua en $x = 1$.

Luego $f(x)$ es continua en $(0, 4)$.

082 ¿Dónde se encuentran y de qué tipo son las discontinuidades de estas funciones?

a) $y=\dfrac{5}{x-2}$

b) $y=\dfrac{3x-6}{x^2-2x+1}$

c) $y=\dfrac{x^2-x}{2x^2+4x-6}$

d) $y=\dfrac{6x}{x^2-2x+3}$

e) $y=\dfrac{2x+2}{x^2-2x-3}$

f) $y=\dfrac{2x^2+4x+6}{x^2-x}$

a) No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

La función tiene en $x = 2$ una discontinuidad de salto infinito.

b) $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

c) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$ y una discontinuidad evitable en $x = 1$.

d) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier valor de x, no hay puntos de discontinuidad.

e) $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

- No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

- No existe $f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$, tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$ y una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

f) $x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

- No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, tiene discontinuidades de salto infinito en $x = 0$ y en $x = 1$.

083 **Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{si } x<-1\\ 2 & \text{si } x=-1\\ \dfrac{8}{3-x} & \text{si } x>-1\end{cases}$$

Especifica los tipos de discontinuidades que presente.

- $f(x)=1+x^2$ es una función polinómica, por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1)$.
- $f(-1)=2$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$$

  $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)\to f(x)$ es continua en $x=2$.

- $f(x)=\dfrac{8}{3-x}$ está definida en $\mathbb{R}-\{3\}$; por tanto, $f(x)$ es continua en $(-1,3)\cup(3,+\infty)$.
- No existe $f(3)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

084 **Dada la función:**

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+3} & \text{si } x<-2\\ x^2+2x+4 & \text{si } -2\le x<1\\ \dfrac{3}{x+7} & \text{si } x>1\end{cases}$$

¿Existe alguna discontinuidad evitable? ¿Cómo se podría evitar?

- $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$ está definida en $\mathbb{R}-\{-3\}$; por tanto, $h(x)$ es continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,-2)$.

  No existe $h(-3)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} h(x)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim\limits_{x\to -3} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x=-3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = -2$:

  $h(-2) = 4$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} h(x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} h(x) = 4\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to -2} h(x) = 4$$

  $\lim\limits_{x\to -2} h(x) = h(-2) \to h(x)$ es continua en $x = -2$.

- $h(x) = x^2 + 2x + 4$ es una función polinómica; por tanto, $h(x)$ es continua en $(-2, 1)$.

- $h(x) = \dfrac{3}{x+7}$ está definida en $\mathbb{R} - \{-7\}$; por tanto, $h(x)$ es continua en $(1, +\infty)$.

- Estudiamos qué ocurre en el punto $x = 1$:

  No existe $h(1)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \dfrac{3}{8}\end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x\to 1} h(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

085 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Estudie la continuidad de esta función.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

$f(x)$ está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$.

$f(4) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \to \text{Existe } \lim\limits_{x\to 4} f(x).$$

$f(4) = 0 = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \to$ La función es continua en $x = 4$.

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

086 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{x}{4} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Estudie su continuidad.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 2)

$f(x) = (x+1)^2 \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 2)$.

$f(x) = \frac{x}{4} \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

- Estudiamos el punto $x = 0$:

  $f(0) = 1$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 0} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- Estudiamos el punto $x = 2$:

  $f(2) = \frac{1}{2}$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

  $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2} = f(2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 2$.

  Luego la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

087 **Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad.**

a) $y = |x|$
b) $y = |x+5|$
c) $y = |3 - 2x|$
d) $y = |x^2 - 1|$
e) $y = |x^2 - x - 6|$
f) $y = |6 - x^2|$
g) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$
h) $y = \left|\frac{1}{x-2}\right|$

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- $f(0) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \geq -5 \\ -x-5 & \text{si } x < -5 \end{cases}$

- $f(-5) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = f(-5) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -5$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \leq \dfrac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = \dfrac{3}{2}$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- $f(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$.

- $f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

e) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- $f(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -2$.

- $f(3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 3$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

f) $6 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \leq -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x \leq \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

- $f\left(-\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \left(-\sqrt{6}\right)^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(-\sqrt{6}\right)^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to -\sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{6}} f(x) = f\left(-\sqrt{6}\right) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = -\sqrt{6}$.

- $f\left(\sqrt{6}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \left(\sqrt{6}\right)^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(\sqrt{6}\right)^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to \sqrt{6}} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{6}} f(x) = f\left(\sqrt{6}\right) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = \sqrt{6}$.

- La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ -\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

- No existe $f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

Luego la función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

088 **Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ x + k & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(La Rioja. Junio 2003. Parte A. Cuestión 4)

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Estudiamos la continuidad en el punto $x = 3$.

La función es continua en $x = 3$ si: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(3) = 3 + k$

Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} \rightarrow 9 = 3 + k \rightarrow k = 6$$

089 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x & \text{si } x<2\\ 2x+k & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

calcula la constante k para que la función sea continua en todos los puntos.

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$. Estudiamos la continuidad en el punto $x=2$.

La función es continua en $x=2$ si: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$f(2)=4+k$

Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4+k\end{array}\right\}\to -1=4+k\to k=-5$$

090 Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos.

$$f(x)=\begin{cases}k & \text{si } x<3\\ \dfrac{x+3}{2} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

(La Rioja. Septiembre 2002. Parte A. Cuestión 1)

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$. Estudiamos la continuidad en el punto $x=3$.

La función es continua en $x=3$ si: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$f(3)=3$

Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=k\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3\end{array}\right\}\to k=3$$

091 Calcular a, b, c, y d para que sea continua la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & \text{si } x<2\\ 3x-a & \text{si } 2\leq x<3\\ b & \text{si } 3\leq x<5\\ -x+c & \text{si } 5\leq x<7\\ d & \text{si } 7\leq x\end{cases}$$

(Murcia. Junio 2004. Bloque 3. Cuestión 2)

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en los intervalos en los que están definidas.
Estudiamos los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- La función es continua en $x = 2$ si: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

  $f(2) = 6 - a$

  Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6 - a \end{array}\right\} \to 1 = 6 - a \to a = 5$$

- Si $a = 5$, la función es continua en $x = 3$ si: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

  $f(3) = b$

  Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = b \end{array}\right\} \to b = 4$$

- Si $a = 5$ y $b = 4$, la función es continua en $x = 5$ si: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$

  $f(5) = -5 + c$

  Existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -5 + c \end{array}\right\} \to 4 = -5 + c \to c = 9$$

- Si $a = 5$, $b = 4$ y $c = 9$, la función es continua en $x = 7$ si: $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = f(7)$

  $f(7) = d$

  Existe $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = d \end{array}\right\} \to d = 2$$

092 Se considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + a & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+2}{x} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Halla los valores de a para los que f es continua.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)

$f(x) = \dfrac{x-2}{x} \to$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \to f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$.

$f(x) = -x^2 + a \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, 1)$.

$f(x) = \dfrac{x+2}{x} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ es continua en $(1, +\infty)$.

Estudiamos los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

La función es continua en $x = -1$ si: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

$f(-1) = -1 + a$

Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1 + a \end{array}\right\} \rightarrow 3 = -1 + a \rightarrow a = 4$$

Si $a = 4$: $f(1) = 3 = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \rightarrow f(x)$ es continua también en $x = 1$.

093 **Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en todo punto.

(La Rioja. Junio 2007. Parte A. Cuestión 2)

$f(x) = x + a \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \rightarrow$ Definida en $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 1)$.

$f(x) = bx \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow f(x)$ es continua en $(1, +\infty)$.

Estudiamos los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- La función es continua en $x = 0$ si: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

  $f(0) = a$

  Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = a$

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

  $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

- La función es continua en $x = 1$ si: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

  $f(1) = b$

  Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = b \end{array}\right\} \rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

094 **Los beneficios, en miles de euros, por la venta de un artículo en función de los gastos que se realizan en publicidad, en miles de euros, vienen dados por la función:**

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -(x-3)^2 + 30 & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

donde *x* representa la cantidad, en miles de euros, que se gasta en publicidad, y *B*(*x*) los beneficios, en miles de euros, que la empresa productora recibe por la venta del artículo.

¿Es continua esta función? ¿Qué ocurre si el gasto de publicidad es superior a 8.000 €?

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, es continua en los intervalos en los que están definidas. Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.

La función es continua en $x = 3$ si: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(3) = 30$

Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 30 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 30 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \rightarrow \text{Existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x).$$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 30 = f(3) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 3$.

Luego la función es continua en (0, 8).

La función no está definida para valores reales mayores que 8, es decir, no se pueden determinar los beneficios a partir de 8.000 €.

095 **Según cierta teoría médica el peligro de un virus se mide en función del tiempo que lleva en el organismo mediante la siguiente expresión, donde *P*(*t*) es para un tiempo de *t* minutos:**

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{50t - 62,5}{0,5t + 5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de la intensidad como función del tiempo.

$P(t) = t^2 \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow P(t)$ es continua en (0, 5).

$P(t) = \dfrac{50t - 62,5}{0,5t + 5} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{-10\} \rightarrow P(t)$ es continua en $(5, +\infty)$.

$f(5) = 25$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 5^-} P(t) = 25 \\ \lim\limits_{t \to 5^+} P(t) = 25 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{t \to 5} P(t) = 25$$

$\lim\limits_{t \to 5} P(t) = P(5) \rightarrow P(t)$ es continua en $t = 5$.

Luego la función es continua en $(0, +\infty)$.

096 **Un inversor utiliza la siguiente función para reinvertir en Bolsa parte del capital que obtiene mensualmente. $R(x)$ representa la cantidad reinvertida cuando el capital obtenido es x (tanto la cantidad como el capital en euros):**

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 600 \\ 40 + \dfrac{400 + 56x}{1.640 + 0{,}1x} & \text{si } x \ge 600 \end{cases}$$

¿Es la cantidad reinvertida una función continua del capital obtenido?

(Asturias. Septiembre 2006. Bloque 3)

$R(x) = 0 \rightarrow$ Función constante $\rightarrow R(x)$ es continua en $(0, 600)$.

$R(x) = 40 + \dfrac{400 + 56x}{1.640 + 0{,}1x} \rightarrow$ Está definida en $\mathbb{R} - \{-16.400\}$
$\rightarrow R(x)$ es continua en $(600, +\infty)$.

$R(600) = 60$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 600^-} R(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 600^+} R(x) = 60 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 600} R(x).$$

Luego la función no es continua en $x = 600$, tiene una discontinuidad de salto finito.

097 **Un artículo se vende según esta regla:**

A 10,50 € el kilo, si $0 \le x < 10$
A 7,50 € el kilo, si $10 \le x < 20$
A 5,50 € el kilo, si $20 \le x$

Escribe la función que representa el precio de venta con x = «peso en kilos», y estudia su continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} 10{,}50x & \text{si } 0 \le x < 10 \\ 7{,}50x & \text{si } 10 \le x < 20 \\ 5{,}50x & \text{si } 20 \le x \end{cases}$$

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en los intervalos en los que están definidas.
Estudiamos los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- La función es continua en $x = 10$ si: $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = f(10)$

  $f(10) = 75$

  Existe $\lim\limits_{x \to 10} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = 105 \\ \lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = 75 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 10} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 10$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- La función es continua en $x = 10$ si: $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = f(10)$

  $f(20) = 110$

  Existe $\lim\limits_{x \to 20} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 20^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 20^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 20^-} f(x) = 150 \\ \lim\limits_{x \to 20^+} f(x) = 110 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 20} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 20$, tiene una discontinuidad de salto finito.

098 **Cada mes, una empresa decide el gasto en publicidad en base a los beneficios que espera obtener dicho mes. Para ello usa la siguiente función, donde *G* es el gasto en publicidad, en cientos de euros, y *x* los beneficios esperados, en miles de euros:**

$$G(x) = \begin{cases} 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} & \text{si } 0 \le x \le 9 \\ 3 + \dfrac{75x + 5.400}{10x^2} & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

¿Es el gasto en publicidad una función continua del beneficio?

(Asturias. Junio 2005. Bloque 3)

$G(x) = 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} \to$ Función polinómica $\to G(x)$ es continua en $(0, 9)$.

$G(x) = 3 + \dfrac{75x + 5.400}{10x^2} \to$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \to G(x)$ es continua en $(9, +\infty)$.

Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.

La función es continua en $x = 9$ si: $\lim\limits_{x \to 9} G(x) = G(9)$

$G(9) = 10{,}5$

Existe $\lim\limits_{x \to 9} G(x)$ si $\lim\limits_{x \to 9^-} G(x) = \lim\limits_{x \to 9^+} G(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 9^-} G(x) = 10{,}5 \\ \lim\limits_{x \to 9^+} G(x) = 10{,}5 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 9} G(x) = 10{,}5$$

$\lim\limits_{x \to 9} G(x) = G(9) \to G(x)$ es continua en $x = 9$.

Luego la función es continua en $(0, +\infty)$.

099 **El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso *P* en toneladas; *t* representa la edad en años de la plancha):**

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 56 - \dfrac{20t}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

¿Es el peso una función continua de la edad?
Según vaya pasando el tiempo, ¿la plancha cada vez aguantará menos peso?

(Asturias. Junio 2003. Bloque 3)

Las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas:

- En (0, 3) la función es una función polinómica y; por tanto, es continua.
- En $(3, +\infty)$ podría presentar una discontinuidad en los puntos donde se anule el denominador:

  $t + 1 = 0 \rightarrow t = -1$

  Como $-1 \notin (3, +\infty)$ la función es continua en $(3, +\infty)$.

  Luego $P(t)$ es continua si es continua en $t = 3$, es decir, si: $\lim\limits_{t \to 3} P(t) = P(3)$

  $P(3) = 41$

  Existe $\lim\limits_{t \to 3} P(t)$ si $\lim\limits_{t \to 3^-} P(t) = \lim\limits_{t \to 3^+} P(t)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 3^-} P(t) = 41 \\ \lim\limits_{t \to 3^+} P(t) = 41 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{t \to 3} P(t) = 41$$

  $\lim\limits_{t \to 3} P(t) = P(3) \rightarrow P(t)$ es continua en $t = 3$.

  Luego la función es continua en $(0, +\infty)$.

  $$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 20 = 36$$

  Por tanto, con el paso del tiempo la plancha soportará un peso de 36 toneladas.

100 **El precio, en euros, de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:**

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2.000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a) Determina el valor de la constante a para que la función $P(x)$ sea continua.

b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

(Murcia. Septiembre 2001. Bloque 2. Cuestión 2)

a) Como las funciones son continuas en los intervalos en los que están definidas, $f(x)$ es continua si es continua en $x = 20$, es decir, si: $\lim\limits_{x \to 20} P(x) = P(20)$

$P(20) = 60$

Existe $\lim\limits_{x \to 20} P(x)$ si $\lim\limits_{x \to 20^-} P(x) = \lim\limits_{x \to 20^+} P(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 20^-} P(x) = 60 \\ \lim\limits_{x \to 20^+} P(x) = \sqrt{400a + 2.000} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 60 = \sqrt{400a + 2.000} \\ \rightarrow 400a + 2.000 = 3.600 \rightarrow a = 4 \end{array}$$

b) El precio de cada litro sería: $\dfrac{P(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 2.000}}{x} = \sqrt{a} \text{ €/litro}$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra. Sea:

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1} \text{ con } x \geq 0$$

la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola. ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

(Andalucía. Año 2002. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)

Cuanto mayor sea el precio del aceite, x, mayor serán las ganancias:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{4}{x+1}\right) = 2$$

Las mayores ganancias quincenales de la empresa pueden ser de 2.000 €.

Las pérdidas se producirán cuando el precio del litro de aceite, x, sea muy bajo, es decir, cuando tienda a 0.

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - \frac{4}{x+1}\right) = 2 - 4 = -2$$

Las mayores pérdidas quincenales de la empresa pueden ser de 2.000 €.

2 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 + 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 3. Ejercicio A)

- $f(0) = 0$

  Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

- $f(1) = 1$

  Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \to f(x)$ es continua en $x = 1$.

3 Sea la función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^3+5t^2 & \text{si } 0\le x<3\\ -t^2+12t-9 & \text{si } 3\le x\le 5\\ 2t+16 & \text{si } 5<x\le 10\end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en $t=3$ y $t=5$.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 2)

- $f(3)=18$

  Existe $\lim\limits_{t\to 3} f(t)$ si $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 3^+} f(t)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 3^-} f(t)=18\\ \lim\limits_{t\to 3^+} f(t)=18\end{array}\right\}\to \lim\limits_{t\to 3} f(t)=18$$

  $\lim\limits_{t\to 3} f(t)=f(3)\to f(t)$ es continua en $t=3$.

- $f(5)=26$

  Existe $\lim\limits_{t\to 5} f(t)$ si $\lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} f(t)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 5^-} f(t)=26\\ \lim\limits_{t\to 5^+} f(t)=26\end{array}\right\}\to \lim\limits_{t\to 5} f(t)=26$$

  $\lim\limits_{t\to 5} f(t)=f(5)\to f(t)$ es continua en $t=5$.

4 Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ -x^2+4x-2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Analice su continuidad.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 2)

La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en los intervalos en los que están definidas.
Estudiamos el punto en el que cambia su expresión algebraica.

La función es continua en $x=1$ si: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$f(1)=1$

Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\to f(x)$ es continua en $x=1$.

Luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

5 Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

A 10 € el kilo, si $0 \le x < 5$
A 9 € el kilo, si $5 \le x < 10$
A 7 € el kilo, si $10 \le x < 20$
A 5 € el kilo, si $20 \le x$

Donde x representa el peso en kilos de la cantidad comprada.

a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

b) Estudiar su continuidad.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión 2)

a) $f(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 9x & \text{si } 5 \le x < 10 \\ 7x & \text{si } 10 \le x < 20 \\ 5x & \text{si } 20 \le x \end{cases}$

b) La función está formada por funciones polinómicas; por tanto, sabemos que es continua en los intervalos en los que están definidas.
Estudiamos los puntos en los que cambia su expresión algebraica.

- $f(5) = 45$

  Existe $\lim_{x \to 5} f(x)$ si $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 5^-} f(x) = 50 \\ \lim_{x \to 5^+} f(x) = 45 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 5} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 5$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(10) = 70$

  Existe $\lim_{x \to 10} f(x)$ si $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^+} f(x)$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 10^-} f(x) = 90 \\ \lim_{x \to 10^+} f(x) = 70 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 10} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 10$, tiene una discontinuidad de salto finito.

- $f(20) = 100$

  Existe $\lim_{x \to 20} f(x)$ si $\lim_{x \to 20^-} f(x) = \lim_{x \to 20^+} f(x)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 20^-} f(x) = 140 \\ \lim_{x \to 20^+} f(x) = 100 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x \to 20} f(x).$$

  Luego la función no es continua en $x = 20$, tiene una discontinuidad de salto finito.

6 Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ clasificando las discontinuidades que se encuentren. ¿Es posible definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

(Cantabria. Junio 2008. Bloque 2. Opción A)

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

- No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3} = 7$$

$\rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Así, $x = 2$ es un punto de discontinuidad evitable.

- No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{14}{0} = \infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x).$$

Luego $x = 3$ es un punto de discontinuidad de salto infinito.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Al ser la primera discontinuidad evitable, la función puede definirse del siguiente modo para que sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$