UNIDAD 6: Derivadas

CUESTIONES INICIALES-PÁG.144

1. Calcula la tasa de variación media en los intervalos [0, 3] y [3, 6] para cada una de las siguientes funciones:

a) f (x) = 2x **b) g (x) = x^2** **c) h (x) = 2^x**

Las tasas de variación media son las que aparecen en la tabla.

Funciones	[0, 3]	[3, 6]
f (x) = 2x	2	2
g (x) = x^2	3	9
h (x) = 2^x	2,33	18,67

2. Dada la función $f\ (x) = \sqrt{2x - 3}$ **, calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h}$$

El límite buscado es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2\ (x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2\ (x+h)-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2\ (x+h)-3} + \sqrt{2x-3}} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h \cdot \left(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3}\right)} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

3. Dada la función $f\ (x) = |3x - 6|$**, calcula:**

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h}$$

Los límites laterales pedidos son:

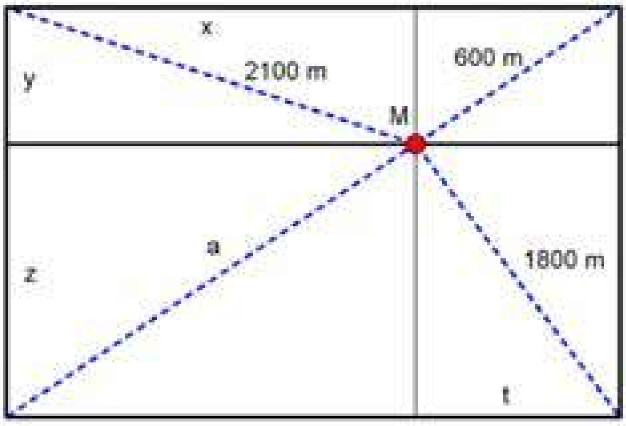
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3\ (2+h) + 6 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f\ (2+h) - f\ (2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3\ (2+h) - 6 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 165

1. El manantial oculto. En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1800 m de la esquina inferior derecha. El manantial actualmente ha desaparecido. ¿A qué distancia se encontraría de al esquina inferior izquierda?

Denotando con **x, y, z, t** los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con **a** la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ y^2 + t^2 = 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ -y^2 - t^2 = -600^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - t^2 = 2100^2 - 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = 2100^2 - 600^2 + 1800^2$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$a^2 = 2100^2 – 600^2 + 1800^2$, entonces a = 2700 metros.

2. Número oculto. La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

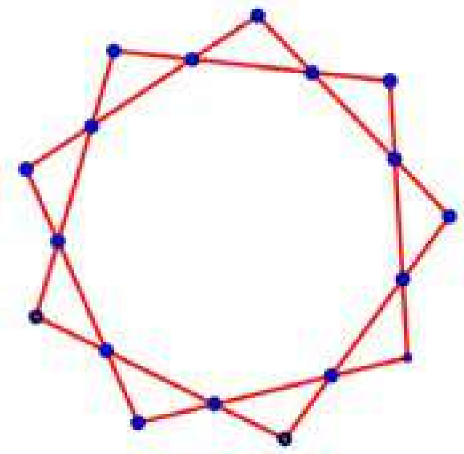
Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Luego $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, es el número de oro.

3. Monedas. ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?

En la figura pueden verse 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.



4. Tantos por ciento. Parte de los 8 000 habitantes de un pueblo se va de vacaciones en verano. De los que quedan, el 63,636363…% les gusta la música y al 27,297297297… les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes de fueron de vacaciones en verano?

Observamos que:

$$63,6363\ldots = \frac{6300}{99} = \frac{700}{11} \quad \text{y} \quad 22,297297\ldots = \frac{22\,275}{999} = \frac{2\,475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al 63,63% de los que queden les gusta la música, es decir al $\frac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al 22,297% de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\frac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\frac{700}{1100}\cdot x = \frac{7}{11}\cdot x$. Les gusta usar vaqueros: $\frac{825}{37}\cdot x = \frac{33}{148}\cdot x$.

Por lo tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y de 48.

Puede ser x = 1628; x = 3256; x = 4884; x = 6512.

Se fueron de vacaciones. 6372 si x = 1628 o 4744 si x = 3256; así sucesivamente.

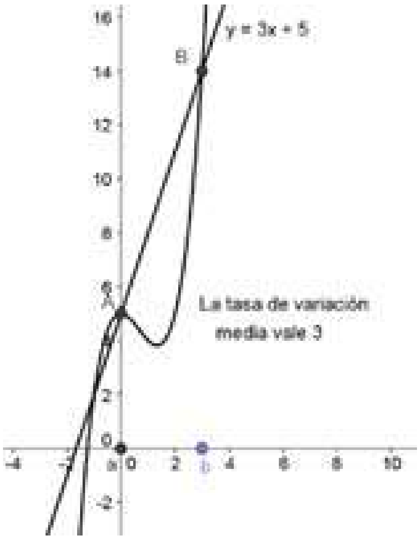
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 167

1. Halla la tasa de variación media de las funciones que siguen en los intervalos que se indican:

a) f(x) = $x^3 – 2x^2 + 5$ en [0, 3] **b)** $f(x)=\sqrt{x+5}$ **en [4, 11]**

a) Seguimos los pasos siguientes:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-2x^2+5** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.



- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 0 y el punto B de abscisa x = 3. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [0, 3].

- En este caso, la tasa de variación media vale 3.

b) Seguimos los pasos siguientes:

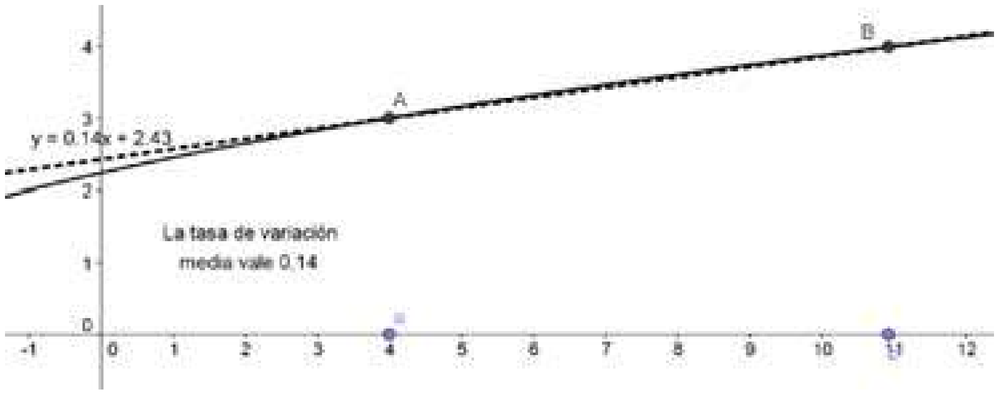
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=sqrt(x+5)** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con la herramienta **Nuevo Punto** dibujamos, en el eje OX, el punto A de abscisa x = 4 y el punto B de abscisa x = 11. Renombramos ambos puntos como a y b.

- En el Campo de Entrada introducimos los puntos A = (x(a),f(x(a))) y B=(x(b),f(x(b))), que aparecerán dibujados sobre la gráfica de la función.

- Dibujamos, con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos**, la recta que une los puntos A y B**.** En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta secante a la gráfica, cuya pendiente es el valor de la tasa de variación media de la función en el intervalo [4, 11].

- En este caso, la tasa de variación media vale 0,14.



2. Calcula f ´ (1) y f ´ (2) en la gráfica de la función f(x) = 6x^2 – 2x^3. Dibuja las tangentes a la gráfica de la función anterior en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2.

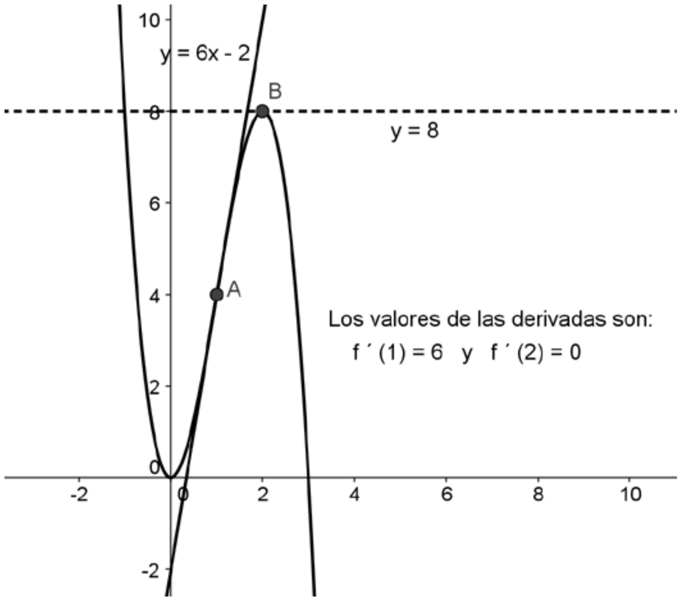
Para calcular f ´ (1) seguimos los pasos:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=6x^2-2x^3** y pulsando la tecla Enter, observamos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Tangente [1, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 1. Determinamos el punto de tangencia A con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la gráfica y la recta tangente. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 6x – 2, a la gráfica en el punto A, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 1. Tenemos que f ´ (1) = 6.

Para calcular f ´ (2) seguimos los pasos:

- Con el comando **Tangente [2, f]** dibujamos la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 2. Determinamos el punto de tangencia B con la herramienta **Intersección de Dos Objetos** como intersección de la recta tangente y la gráfica. En la Ventana algebraica observamos la ecuación de la recta tangente, y = 8, a la gráfica en el punto B, cuya pendiente es el valor de la derivada para x = 2. Tenemos que f ´ (2) = 0.



Todo lo anterior puede verse en la imagen.

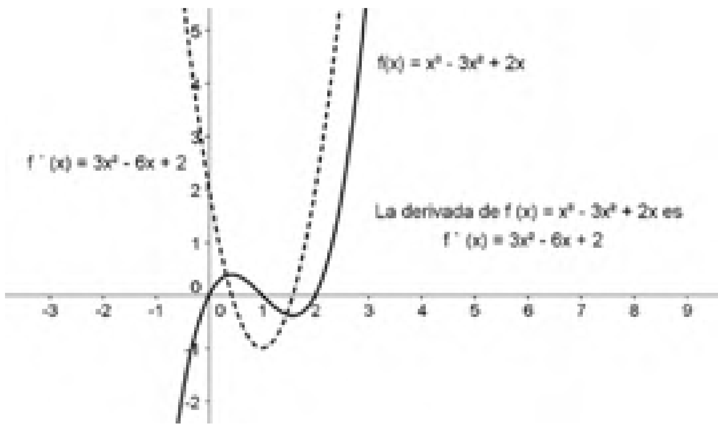
3. Estudia y representa las funciones siguientes y sus derivadas:

a) f(x) = x^3 – 3x^2 + 2x **b) f(x) = e^{-2x}** **c) f(x) = ln (x – 2)**

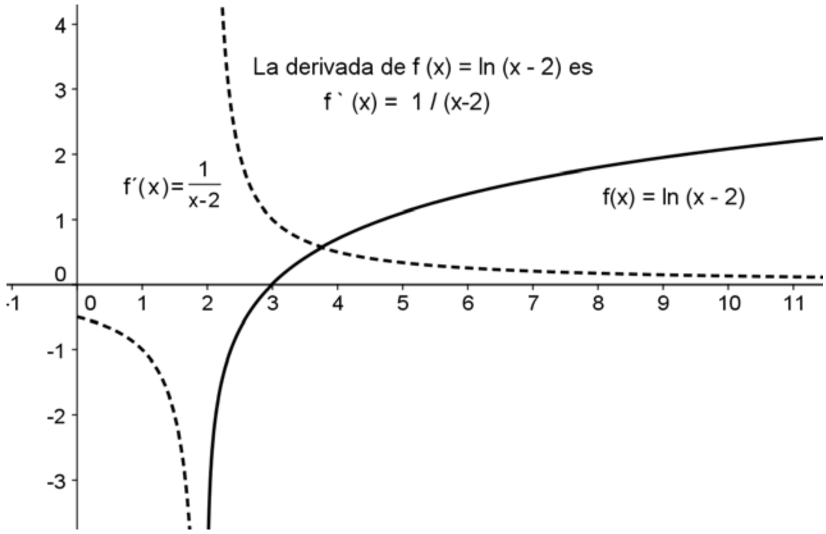
Seguimos los pasos:

- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=x^3-3x^2+2x** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

- Con el comando **Derivada [f**] calculamos la derivada de la función, que podemos ver en la Ventana algebraica, y la representación gráfica. Todo ello puede verse en el gráfico, que va acompañado de un texto estático.



- Para las otras funciones procedemos de manera análoga y obtenemos los resultados que pueden verse en las imágenes.



4. Estudia las derivadas sucesivas de las familias de funciones:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ **b) $f(x) = a \cdot sen (bx + c)$**

a) Para la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

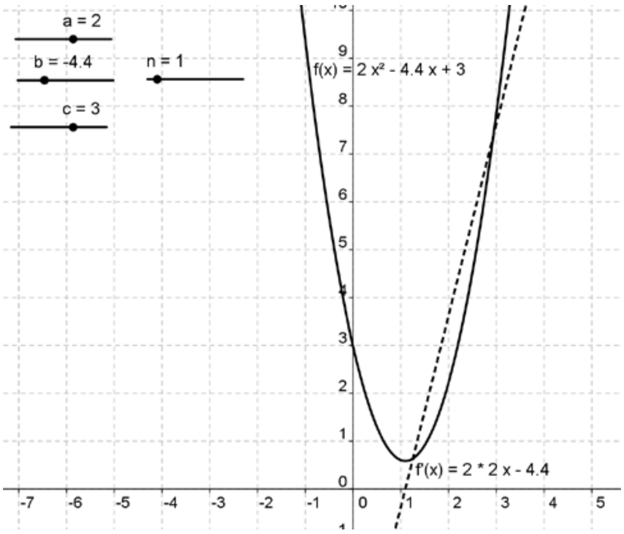
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

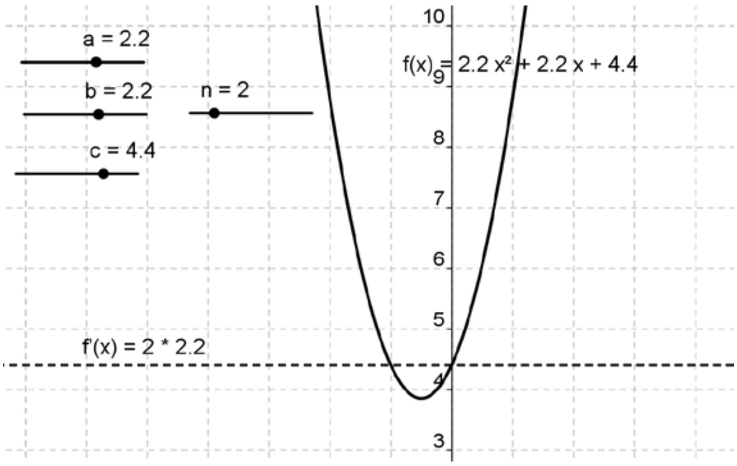
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*x^2+b*x+c** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

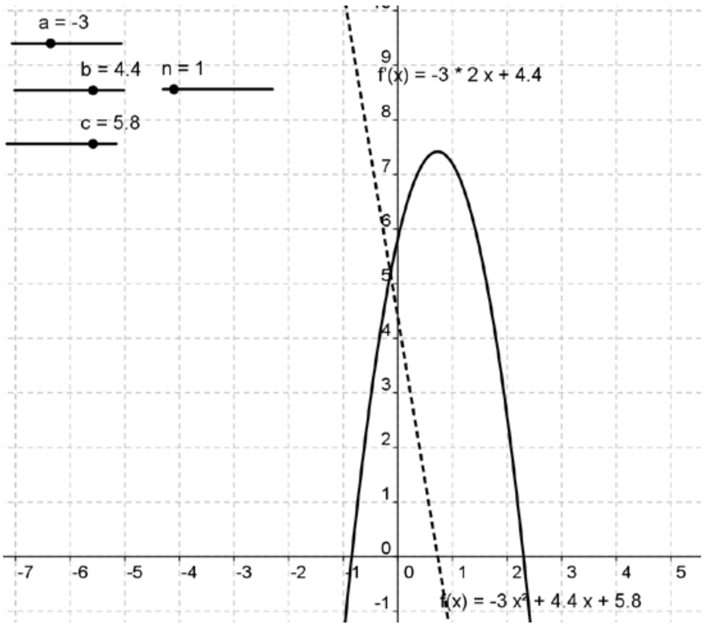
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







b) Para la función f(x) = a · sen (bx + c) seguimos los pasos:

- Con la herramienta **Deslizador** creamos tres deslizadores que llamamos a, b y c, que varíen entre – 10 y 10 con incremento 0,1.

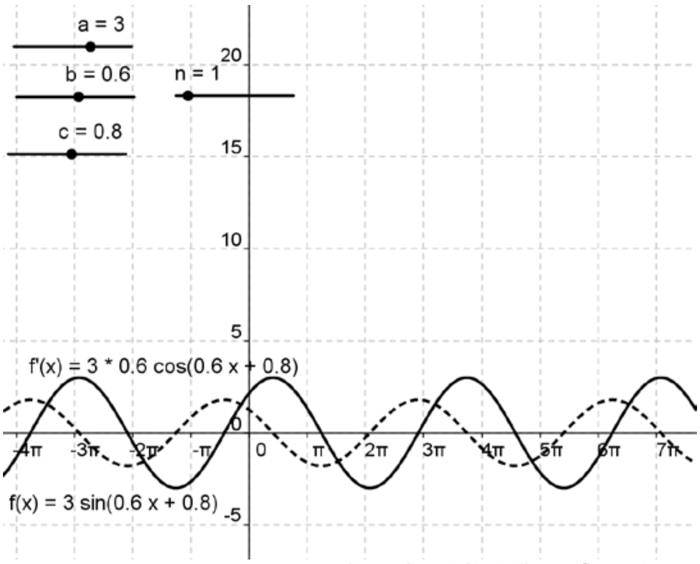
- Con la herramienta **Deslizador** creamos un cuarto deslizador que llamamos n y hacemos que varíe entre 1 y 10 con incremento de una unidad.

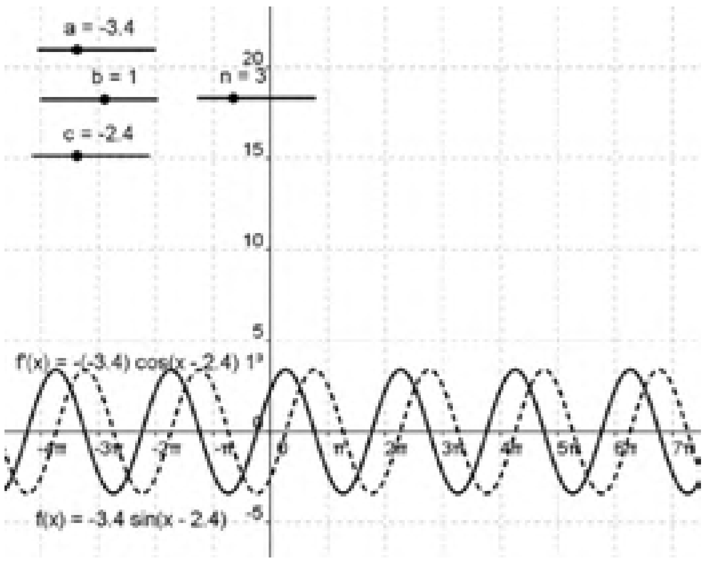
- En el **Campo de Entrada** introducimos la expresión de la función, **f(x)=a*sin(b*x+c)** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica en la Ventana Gráfica.

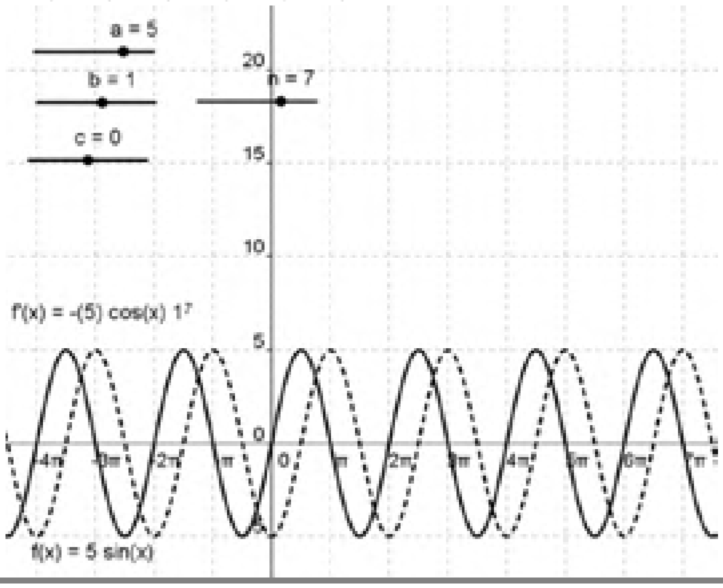
- Con el comando **Derivada [f, n]** calculamos la derivada de orden n que se representa gráficamente y aparece su expresión en la Ventana algebraica.

- Variamos el valor de los deslizadores y observaremos las gráficas de la función y de su función derivada del orden correspondiente.

En las imágenes aparecen algunos de las múltiples situaciones que pueden darse.







ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 170

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 4] de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ **d)** $k(x) = \sqrt{x+5}$

Las tasas pedidas son:

a) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{15-3}{2} = 6$

b) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{g(4) - g(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{2} = \dfrac{1}{6} \approx 0,1667$

c) $t_{vm}\left[2, 4\right] = \dfrac{h(4) - h(2)}{4-2} = \dfrac{\frac{5}{17} - \frac{3}{5}}{2} = -\dfrac{13}{85} \approx -0,22$

d) $t_{vm}\ [2, 4] = \dfrac{k(4) - k(2)}{4-2} = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \approx 0,1771$

2. Una empresa que fabrica componentes electrónicos ha comprobado que la variación de la demanda, D, de un determinado producto en función de su precio varía de acuerdo con la expresión:

$$D(x) = 1000 - 2x^2$$

a) Determina la variación de la demanda si el precio cambia de 5 a 10 euros.

b) Calcula la variación media de la demanda en el intervalo de precios [5, 15].

c) Averigua la variación instantánea de la demanda para x = 5.

a) Las demandas del producto para x = 5 y x = 10 euros, son respectivamente:

$$D(5) = 1000 - 2 \cdot 5^2 = 950 \quad \text{y} \quad D(10) = 1000 - 2 \cdot 10^2 = 800$$

La variación de la demanda será D (10) – D (5) = 800 – 950 = - 150.

b) La variación media de la demanda en el intervalo [5, 15] es:

$$t_{vm}\ [5, 15] = \frac{D(15) - D(5)}{15-5} = \frac{550-950}{10} = -40$$

c) La variación instantánea de la demanda para x = 5 será:

$$t_{vi}\ (5) = \lim_{x \to 5} \frac{D(x) - D(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{50 - 2x^2}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{-2(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \to 0}\ [-2 \cdot (x+5)] = -20$$

3. El crecimiento de una colonia de bacterias viene dado por la siguiente expresión en función del tiempo P (t) = t^2 + 40t + 100, donde éste viene dado en minutos.

a) ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento entre el comienzo del cultivo y pasados 10 minutos?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a los 10 minutos?

a) La velocidad media entre t = 0 y t = 10 es:

$$t_{vm}\ [0, 10] = \frac{P\ (10) - P\ (0)}{10 - 0} = \frac{600 - 100}{10} = 50$$

b) La velocidad de crecimiento para t = 10 es:

$$t_{vi}\ (10) = \lim_{t\to 10} \frac{P\ (t) - P\ (10)}{t - 10} = \lim_{t\to 10} \frac{t^2 + 40t - 500}{t - 10} = \lim_{t\to 10} \frac{(t - 10)\ (t + 50)}{t - 10} = \lim_{t\to 10} (t + 50) = 60$$

4. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = 2x – x^2; D [f (1)] **b)** $f\ (x) = \sqrt{x - 3};\ f'(7)$ **c)** $f\ (x) = \dfrac{2}{x + 1};\ D\left[f\ (3)\right]$

Las derivadas son:

a) $$D\left[f\ (1)\ \right] = \lim_{h\to 0} \frac{f\ (1 + h) - f\ (1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1 + h) - (1 + h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

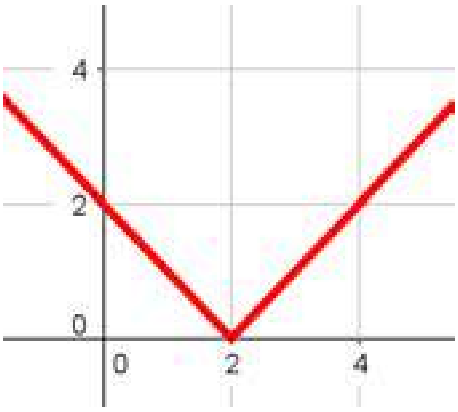
b) $$f\ '\ (7) = \lim_{x\to 7} \frac{f\ (x) - f\ (7)}{x - 7} = \lim_{x\to 70} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7} \cdot \frac{\sqrt{x - 3} + 2}{\sqrt{x - 3} + 2} =$$

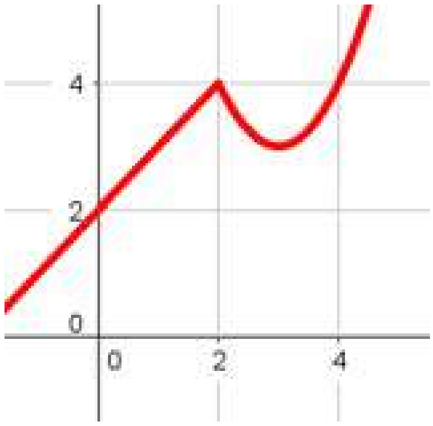
$$= \lim_{x\to 70} \frac{x - 7}{(x - 7)\cdot\left(\sqrt{x - 3} + 2\right)} = \lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 2} = \frac{1}{4}$$

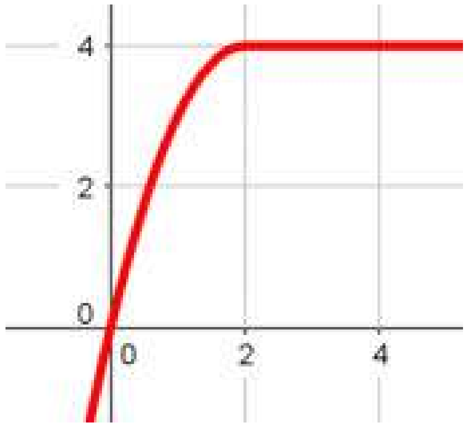
c) $$D\left[f\ (3)\ \right] = \lim_{h\to 0} \frac{f\ (3 + h) - f\ (3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h + 4} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h\ (h + 4)} = -\frac{1}{8}$$

■ 5. Haciendo uso del concepto de derivada lateral en un punto, estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en x = 2. Para cada una de ellas representa gráficamente su función derivada.

a) f (x) = |2 - x| **b)** $g\ (x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **c)** $h\ (x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



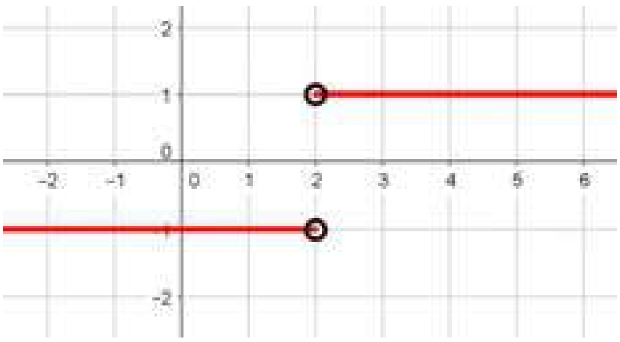




a) La función f (x) = |2 - x| es derivable en R – {2}.

La derivadas laterales en x = 2 son f ´ (2^-) = - 1 y f ´ (2^+) = 1.

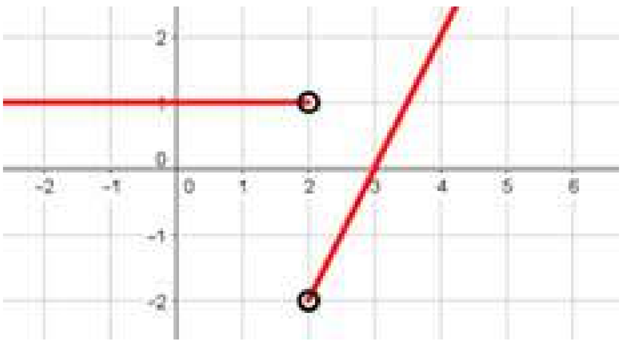
La función derivada es $f\,'(x)=\begin{cases}-1 \ si\ x<2\\ 1\ \ si\ x>2\end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



b) La función $g\,(x)=\begin{cases}x+2 & si\ x\le 2\\ x^2-6x+12 & si\ x>2\end{cases}$ es derivable en R – {2}.

Las derivadas laterales en x = 2 son g ´ (2^-) = 1 y g ´ (2^+) = - 2.

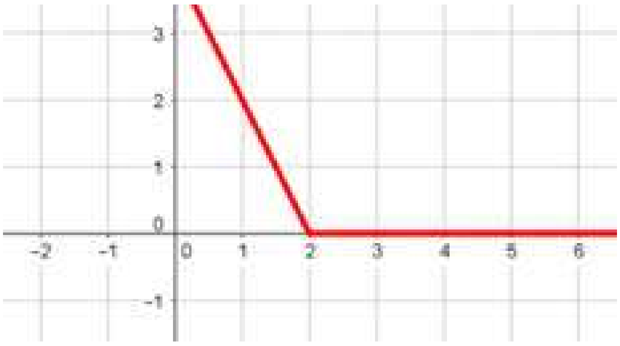
La función derivada es $g\,'(x)=\begin{cases}1 \ \ si\ \ x<2\\ 2x-6\ si\ x>2\end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



c) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & si\ x \leq 2 \\ 4 & si\ x > 2 \end{cases}$ es derivable en R.

Las derivadas laterales en x = 2 son h ´ (2^-) = 0 y h ´ (2^+) = 0.

La función derivada es $h´(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x < 2 \\ 0 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



6. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en los puntos que se indican:

a) f (x) = $2x^3 + x$ en $x_0 = 0$ **b)** $g(x) = \dfrac{6}{x}$ **en $x_0 = 2$** **c)** $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ **en $x_0 = 3$**

a) El punto de tangencia es (0, 0). La pendiente de la recta tangente es f ´ (0) = 1.

La ecuación de la tangente es y – 0 = 1 · (x – 0), es decir, x – y = 0.

b) El punto de tangencia es (2, 3). La pendiente de la recta tangente es g ´ (2) = $-\dfrac{3}{2}$.

La ecuación de la tangente es: $y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 2)$, es decir, 3x + 2y = 12.

c) El punto de tangencia es (3, 4). La pendiente de la recta tangente es h ´ (3) = $-\dfrac{3}{4}$.

La ecuación de la tangente es: $y - 4 = -\dfrac{3}{4}(x - 3)$, es decir, 3x + 4y = 25.

7. Sea la curva de ecuación y = - x^3 + 11x. Halla las ecuaciones de sus rectas tangentes que sean paralelas a la recta de ecuación y = - x.

La derivada de la función es f ´ (x) = - $3x^2$ + 11.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación – $3x^2$ + 11 = - 1. Éstas son x = - 2 y x = 2. Los puntos de tangencia son P (- 2, - 14) y Q (2, 14).

Las rectas tangentes pedidas son:

- En el punto P (- 2, - 14): y + 14 = - (x + 2), es decir, x + y = - 16.

En el punto Q (2, 14): y – 14 = - (x – 2), es decir, x + y = 16.

8. Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^3}$ en los que la tangente a la función es paralela a la recta de ecuación y = 2.

La pendiente de la recta tangente es la derivada en dicho punto: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^4}$.

La pendiente de la recta y = 2 es 0. Por tanto las tangentes de f (x) paralelas a y = 2 tiene que cumplir:

$$\frac{x^2 - 9}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son $\left(-3, \dfrac{2}{9}\right)$ y $\left(3, -\dfrac{2}{9}\right)$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 171

9. ¿Para qué valores de m y n cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & si\ x \le 1 \\ -x^2 + nx & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x^3 - x & si\ x \le 0 \\ mx + n & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Para que la función sea continua en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 5x + m\right) = m - 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-x^2 + nx\right) = -1 + n \end{array}\right\} \Rightarrow m - 4 = -1 + n \quad \Rightarrow m - n = 3$$

Para que la función sea derivable en x = 1 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + n = -3$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} m - n = 3 \\ -2 + n = -3 \end{cases}$, obtenemos: $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$

b) Para que la función sea continua en x = 0 se cumplirá:

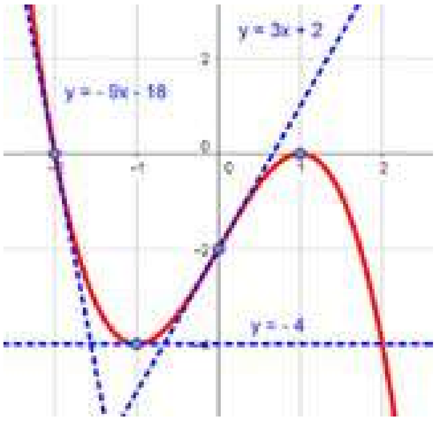
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^3 - x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(mx + n\right) = n \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0$$

Para que la función sea derivable en x = 0 se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} g\,'(0^-) = -1 \\ g\,'(0^+) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1$$

Los valores buscados son m == - 1 y n = 0.

10. En la gráfica adjunta está representada la función y = f (x). Calcula, de forma razonada:



a) D f (- 2) **b) D f (- 1)** **c) D f (0)** **d) D f (1)**

En cada caso:

a) D f (- 2) = - 9, que es la pendiente de la recta tangente, de ecuación y = - 9x – 18, a la función en x = - 2.

Razonando de forma análoga:
b) D f (- 1) = 0 c) D f (0) = 3 d) D f (1) = 0

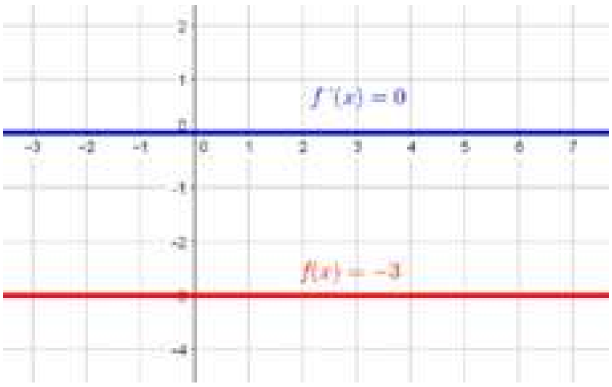
11. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones y representa, en el mismo diagrama, la función y su función derivada.

a) f (x) = - 3 **c) f (x) = 3x^2 – 6x**

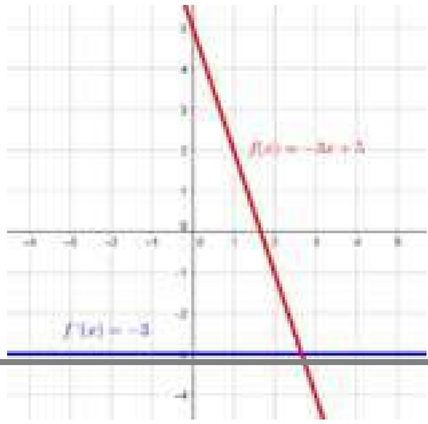
b) f (x) = - 3x + 5 **d) f (x) = x^3 – 12x + 8**

Las gráficas de las funciones propuestas pueden verse en color rojo y las de sus funciones derivadas en color azul.

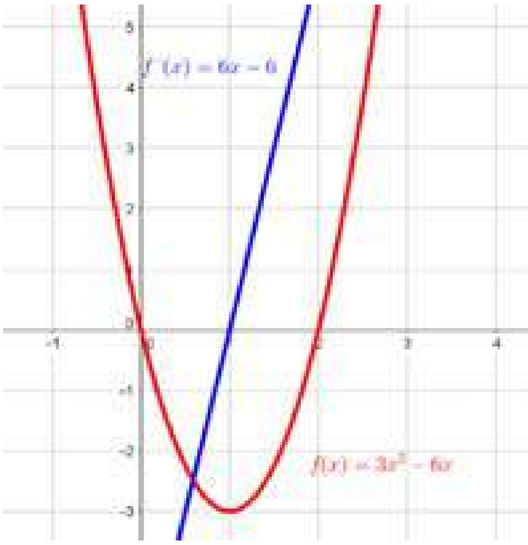
a) La función f (x) = - 3 y su función derivada f ´(x) = 0.



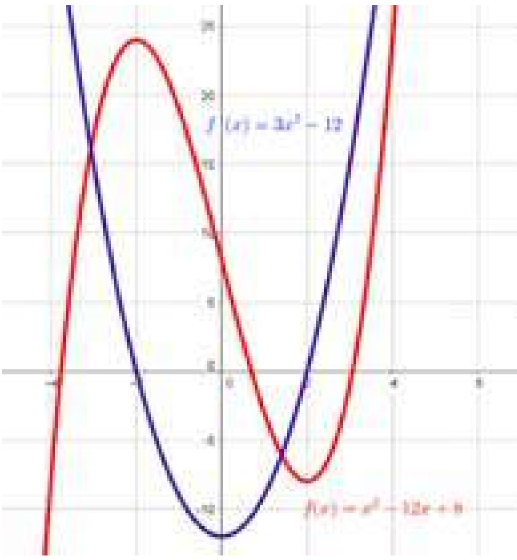
b) La función f (x) = - 3x + 5 y su función derivada f ´ (x) = - 3.



c) La función f (x) = $3x^2 - 6x$ y su función derivada f ´ (x) = $6x - 6$.



d) La función f (x) = $x^3 - 12x + 8$ y su función derivada f ´(x) = $3x^2 - 12$.



■ **12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $D\left[2x^3 + 3\sqrt[3]{x^2}\right]$

b) $D\left[3x^2 \cdot \sqrt{x^3}\right]$

c) $D\left[(x^3 - 2)^4\right]$

d) $D\left[x^3 \cdot 3^x\right]$

j) $D\left[(2^{3x} - 5)^3\right]$

k) $D\left[10^{x^2} + 10^x + 10\right]$

l) $D\left[\sqrt{2 - 5e^x}\right]$

m) $D\left[(1 - x^2) \cdot e^x\right]$

r) $D\left[(sen\ x - \cos\ x)^2\right]$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]$

t) $D\left[tg^2\ x + tg\ x^2\right]$

u) $D\left[\sqrt{x^2 + 3} \cdot sen\ x\right]$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]$ **n)** $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}\right]$ **v)** $D\left[\dfrac{sen\ x}{1-sen\ x}\right]$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]$ **ñ)** $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]$ **w)** $D\left[e^{tg\ x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]$ **o)** $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]$ **x)** $D\left[arcsen\ x^3\right]$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]$ **p)** $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$ **y)** $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right]$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]$ **q)** $D\left[\ln^2 x-\ln(\ln x)\right]$ **z)** $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2x^3+3\sqrt[3]{x^2}\right]=6x^2+2x^{-1/3}$

b) $D\left[3x^2\cdot\sqrt{x^3}\right]=\dfrac{21}{2}x^{5/2}$

c) $D\left[(x^3-2)^4\right]=12x^2(x^3-2)^3$

d) $D\left[x^3\cdot 3^x\right]=x^2\cdot 3^x\cdot(3+x\cdot\ln 3)$

e) $D\left[\dfrac{2^x}{x^2}\right]=\dfrac{\ln 2\cdot x\cdot 2^x-2\cdot 2^x}{x^3}$

f) $D\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}\right]=-\dfrac{6}{(x-1)^3}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right]=-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}\,(2x-1)}$

h) $D\left[\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}\right]=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2}$

i) $D\left[\sqrt[3]{x^2}+5^{2x+1}\right]=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+1}$

j) $D\left[(2^{3x}-5)^3\right]=9\cdot\ln 2\cdot 2^{3x}\cdot(2^{3x}-5)^2$

k) $D\left[10^{x^2}+10^x+10\right]=2x\cdot\ln 10\cdot 10^{x^2}+\ln 10\cdot 10^x$

l) $D\left[\sqrt{2-5e^x}\right]=\dfrac{-5e^x}{2\sqrt{2-5e^x}}$

m) $D\left[(1-x^2)\cdot e^x\right](-x^2-2x+1)\cdot e^x$

n) $D\left[\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}\right]=\dfrac{(3x^2-2x+3)\cdot e^{3x}}{(1+x^2)^2}$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}}\right]=\dfrac{e^{1/x}}{x^2\cdot\left(1+e^{1/x}\right)^2}$

o) $D\left[\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

p) $D\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]=-\dfrac{1}{2x\left(1+\sqrt{x}\right)}$

q) $D\left[\ln^2 x-\ln(\ln x)\right]=\dfrac{2\ln^2 x-1}{x\cdot\ln x}$

r) $D\left[(sen\ x-\cos x)^2\right]=2\cdot(sen^2\ x-\cos^2 x)$

s) $D\left[\ln(\cos(2x))\right]=-2\ tg\ (2x)$

t) $D\left[tg^2\ x+tg\ x^2\right]=\dfrac{2\cdot tg\ x}{\cos^2 x}+\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

u) $D\left[\sqrt{x^2+3}\cdot sen\ x\right]=\dfrac{x\cdot sen\ x+(x^2+3)\cdot\cos x}{\sqrt{x^2+3}}$

v) $D\left[\dfrac{sen\ x}{1-sen\ x}\right]=\dfrac{\cos x}{(1-sen\ x)^2}$

w) $D\left[e^{tg\ x}\right]=\dfrac{e^{tg\ x}}{\cos^2 x}$

x) $D\left[arcsen\ x^3\right] = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

y) $D\left[arctg\ \dfrac{x}{2}\right] = \dfrac{2}{4+x^2}$

z) $D\left[arctg\ \sqrt{x+1}\right] = \dfrac{1}{2\cdot(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}$

13. Calcula el valor de k para que la derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{kx^2+1}{2x+k}$ es $f\,'(x) = \dfrac{2kx^2+2k^2x-2}{(2x+k)^2}$.

Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ se cumplirá:

$$\frac{\dfrac{2k}{4}+\dfrac{2k^2}{2}-2}{(1+k)^2} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2k^2+k-4}{2k^2+4k+2} = 1 \quad\Rightarrow\quad k = -2$$

14. Los beneficios acumulados de una empresa, en miles de euros, a los t años de su fundación vienen dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t^2}{t+4} - 4$$

a) ¿Cuál fue la inversión inicial? ¿Cuándo comenzó a tener beneficios?

b) ¿Cuáles fueron las ganancias medias por año en los cinco y diez primeros años?

c) ¿Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento al final del primero, quinto y décimo año?

a) La inversión inicial fue de 4000 euros, al ser los beneficios iniciales $B(0) = \dfrac{2\cdot 0^2}{0+4} - 4 = -4$.

Para saber cuando la empresa comenzó a tener beneficios debe cumplirse B (t) > 0. Resolvemos la inecuación anterior y obtenemos:

$$B(t) > 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2t^2}{t+4} - 4 > 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2t^2-4t-16}{t+4} > 0 \quad\Rightarrow\quad t > 4$$

La empresa comienza a tener beneficios a partir del cuarto año.

b) Las ganancias medias por año durante los cinco primeros años fueron:

$$\frac{B(5)-B(0)}{5}=\frac{1{,}56-(-4)}{5}=1{,}11111 \text{, es decir 1 111,11 euros.}$$

Las ganancias medias por año durante los diez primeros años fueron:

$$\frac{B(10)-B(0)}{10}=\frac{10{,}29-(-4)}{10}=1{,}42857 \text{, es decir 1 428,57 euros.}$$

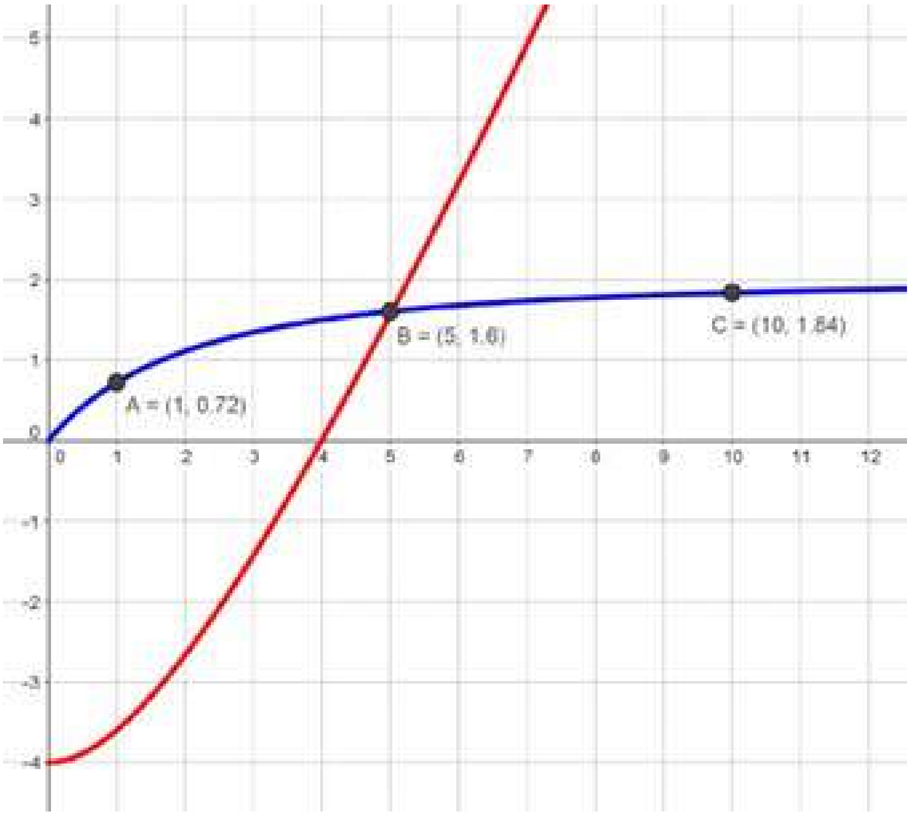
c) Las velocidades instantáneas de crecimiento en los años pedidos son:

En el primer año: $B\,'(1)=\dfrac{2\cdot 1^2+16\cdot 1}{(1+4)^2}=0{,}72$

En el quinto año: $B\,'(5)=\dfrac{2\cdot 5^2+16\cdot 5}{(5+4)^2}=1{,}60$

En el décimo año: $B\,'(10)=\dfrac{2\cdot 10^2+16\cdot 10}{(10+4)^2}=1{,}84$

En la imagen puede verse la gráfica de la función en color rojo y la gráfica de su función derivada en color azul. En los puntos A, B y C aparecen los valores de las velocidades instantáneas de crecimiento en los años 1, 5 y 10.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 172

1. La población de una pequeña comunidad rural varía de acuerdo con la función:

$$P\,(t)=\frac{10\ 000}{1+4e^{-0,1t}}$$

a) Encuentra el incremento de población en los primeros 5 años, y en los primeros 10 años. Halla, en ambos casos, los correspondientes incrementos medios anuales de población.

b) Calcula los incrementos instantáneos de población en los años quinto y décimo.

a) Los incrementos de población fueros:

- En los primeros 5 años: P (5) – P (0) ≈ 2919 – 2000 = 919 habitantes.

- En los primeros 10 años: P (10) – P (0) ≈ 4046 – 2000 = 2046 habitantes.

Los incrementos medios de población fueron:

- En los primeros 5 años: $\dfrac{P\,(5)-P\,(0)}{5}=\dfrac{919}{5}=183,8$ habitantes/año

- En los primeros 10 años: $\dfrac{P(10)-P(0)}{10}=\dfrac{2046}{10}=204,6$ habitantes/año.

b) La función derivada de P (t) es $P\,'\,(t)=\dfrac{4\ 000\cdot e^{-0,1t}}{(1+4e^{-0,1t})^2}$.

Los incrementos instantáneos pedidos son:

- En el quinto año: $P\,'\,(5)=\dfrac{4\ 000\cdot e^{-0,1\cdot 5}}{(1+4e^{-0,1\cdot 5})^2}=206,68$ habitantes/año.

- En el décimo año: $P\,'\,(10)=\dfrac{4\ 000\cdot e^{-0,1\cdot 10}}{(1+4e^{-0,1\cdot 10})^2}=240,90$ habitantes/año.

2. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+2}, & x\neq -2\\ 0, & x=2\end{cases}$

a) Determina sus puntos de discontinuidad y su derivada en x = - 2 y x = 2.

b) Explica la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media en un punto, indicando lo que significa el valor de la derivada de la función f(x) en x = 2.

a) La función f(x) es continua para cualquier número real salvo para x = - 2 donde presenta una discontinuidad, al cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x-2}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x-2}{x+2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x+2} \text{ no existe}$$

La función derivada de la función f(x) es $f\,'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, válida para R – {- 2}.

La derivada en x = - 2 no existe al ser en dicho punto discontinua.

La derivada en x = 2 vale f ´ (2) = $\dfrac{4}{(2+2)^2} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

b) La tasa de variación media de la función f(x) en un entorno de centro 2 y radio h vale:

$$t_{vm}\left[2-h, 2+h\right] = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \frac{\dfrac{2+h-2}{2+h+2} - \dfrac{2-h-2}{2-h+2}}{2h} = \frac{\dfrac{h}{4+h} + \dfrac{h}{4-h}}{2h} = \frac{4}{16-h^2}$$

La derivada en el punto 2 es:

$$f\,'(2) = \lim_{h\to 0} t_{vm}\left[2-h, 2+h\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{2+h-(2-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{4}{16-h^2} = \frac{1}{4}$$

El valor de la derivada en el punto x = 2 es el valor de la tasa de variación instantánea en x = 2 o la pendiente de la recta tangente trazada en la gráfica de la función en x = 2.

3. Determina a y b para que la función siguiente sea derivable en x = 2.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable en x = 2, tiene que ser continua en ese punto, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+3x) = 4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-bx-4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 2b = -6$$

Además las derivadas laterales en x = 2 tienen que coincidir. Si $f\,'(x) = \begin{cases} 2ax+3 & si\ x < 2 \\ 2x - b & si\ x > 2 \end{cases}$ se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-) = 4a+3 \\ f\,'(2^+) = 4-b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + b = 1$$

Los valores buscados son la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva f (x) = $x^3 - x^2 + x + 1$ que tiene pendiente m = 2.

Las abscisas de los puntos de tangencia son las soluciones de la ecuación:

$$f\,'(x) = 2 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 2x + 1 = 2 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (1, f (1)) = (1, 2) es:

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 1) \;\Rightarrow\; y = 2x \;\Rightarrow\; 2x - y = 0.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{27}\right)$ es:

$$y - \frac{14}{27} = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \;\Rightarrow\; y = 2x + \frac{32}{27} \;\Rightarrow\; 54x - 27y = -32$$

5. La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, - 2) es tangente a la curva y = x^3. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (0, - 2) y tiene pendiente 3 es y = 3x – 2.

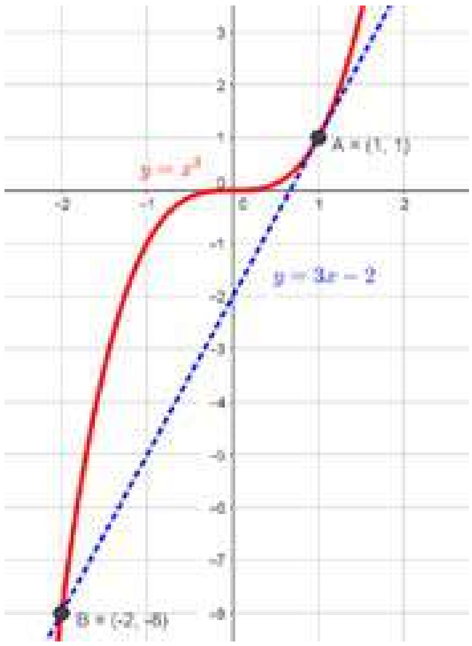
Resolvemos el sistema cuyas ecuaciones son las de la curva y la de la tangente y obtenemos:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \;o\; \begin{cases} x = -2 \\ y = -8 \end{cases}$$

El punto de tangencia tiene de coordenadas (1, 1).

El punto (- 2, - 8) es un punto de corte entre la curva y la tangente.

Puede observarse en la imagen.



6. Halla el punto de la gráfica de la función $f\,(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$ en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

La derivada de la función es f ´ (x) = $4x - x^2$.

La abscisa del punto de tangencia es la solución de la ecuación $4x - x^2 = 4$, es decir, x = 2. El punto pedido es $\left(2, \dfrac{16}{3}\right)$.

7. Calcula las derivadas de las funciones que se indican a continuación:

a) $D\left[2^{5x}+\frac{1}{x^2}\right]$ **d)** $D\left[e^{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\right]$ **g)** $D\left[\frac{x^2-2}{\ln x}\right]$

b) $D\left[\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]$ **e)** $D\left[\frac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]$ **h)** $D\left[\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]$

c) $D\left[\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]$ **f)** $D\left[\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]$ **i)** $D\left[arctg\,\frac{x-1}{x+1}\right]$

Las funciones derivadas son:

a) $D\left[2^{5x}+\frac{1}{x^2}\right]=5\cdot\ln 2\cdot 2^{5x}-\frac{2}{x^3}$

b) $D\left[\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

c) $D\left[\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt{2x^3}}\right]=\frac{7}{6x^2\sqrt[6]{2x}}$

d) $D\left[e^{\sqrt{x\cdot(1-x)}}\right]=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot e^{\sqrt{x-x^2}}$

e) $D\left[\frac{e^{-2x}}{(2-x^2)^2}\right]=\frac{(2x^2+4x-4)\cdot e^{-2x}}{(2-x^2)^3}$

f) $D\left[\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\right]=\frac{1}{2x\,(1-\ln x)\,\sqrt{1-\ln x}}$

g) $D\left[\frac{x^2-2}{\ln x}\right]=\frac{2x^2\cdot\ln x-x^2+2}{x\cdot\ln^2 x}$

h) $D\left[\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\right]=\frac{3x+12}{2x\,(x+3)}$

i) $D\left[arctg\,\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{1}{1+x^2}$

8. El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del mes de enero viene dado por la función:

$$N(t) = 100 + 200 \cdot e^{0,2\,t}$$

donde t representa el número de días transcurridos a partir del 1 de enero.

a) ¿Cuántos enfermos había el citado día 1 de enero?

b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de la evolución del número de enfermos al cabo de t días.

c) Determina la fecha en la cuál la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803 enfermos/día.

a) El número de enfermos al comienzo del día 1 de enero era de $N(0) = 100 + 200 \cdot e^{0,2 \cdot 0} = 300$.

b) La velocidad de evolución del número de enfermos está dad por la derivada, es decir, por la función:

$$N'(t) = 200 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2 \cdot t}\text{, es decir, } N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t}$$

c) Resolviendo la ecuación:

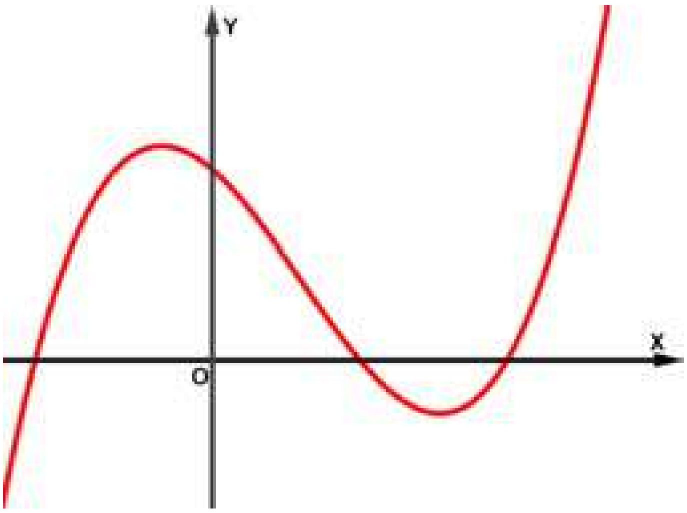
$$N'(t) = 40 \cdot e^{0,2 \cdot t} = 803 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0,2} \cdot \ln \frac{803}{40} \approx 15$$

Por tanto, la velocidad de evolución del número de enfermos fue de 803 enfermos/día al finalizar el día 15 de enero.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 173

Una propiedad de las cúbicas

1. Utilizando algún medio tecnológico (calculadora gráfica o programa con representación gráfica) representa la función cúbica $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 20x + 75$ y halla la *Ventana gráfica* adecuada para que el dibujo de la gráfica aparezca como se muestra en la imagen.



a) ¿Cuáles son las raíces de la función y = f (x)? Confirma los valores utilizando el teorema del resto

b) Toma las raíces de dos en dos y halla las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de abscisa igual a la media aritmética de cada par de raíces.

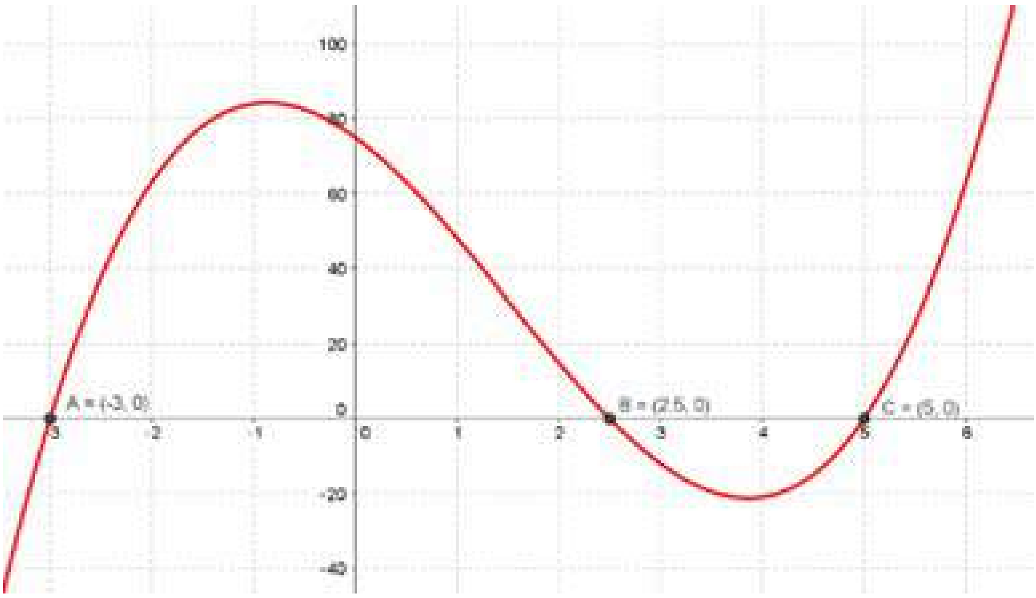
c) Halla el punto donde cada una de estas rectas tangentes corta de nuevo a la curva. ¿Ocurre siempre lo mismo sea cual sea el par de raíces utilizado?

2. ¿Ocurre lo mismo para otras funciones cúbicas similares? ¿Puedes probar las propiedades observadas u obtenidas?

3. Investiga las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, (c) o una raíz real y dos raíces complejas.

1. La parte gráfica de esta investigación se ha realizado con GeoGebra.

Introducimos la expresión de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 20x + 75$, ajustamos la Ventana gráfica y hallamos la intersección de la gráfica de $y = f(x)$ con el eje OX, obteniendo los puntos: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).



a) Las raíces son $x_A = -3$, $x_B = 2{,}5$ y $x_C = 5$.

Comprobamos, con el teorema del resto, que es así:

$f(x_A) = f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 - 20 \cdot (-3) + 75 = 0$

$f(x_B) = f(2{,}5) = 2 \cdot (2{,}5)^3 - 9 \cdot (2{,}5)^2 - 20 \cdot (2{,}5) + 75 = 0$

$f(x_A) = f(5) = 2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 75 = 0$

b) Los puntos, sobre el eje OX, de abscisa la media aritmética de las raíces son:

De A (- 3, 0) y B (2,5; 0) es M_1 (- 0,25; 0)

De A (- 3, 0) y C (5, 0) es M_2 (1, 0)

De B (2,5; 0) y C (5, 0) es M_3 (3,75; 0)

Hallamos los puntos P, Q y R, sobre la gráfica, cuya abscisa es la de los puntos M_1, M_2 y M_3:

$f(x_{M1}) = f(-0{,}25) = 2 \cdot (-0{,}25)^3 - 9 \cdot (-0{,}25)^2 - 20 \cdot (-0{,}25) + 75 = 79{,}41$

$f(x_{M2}) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + 75 = 48$

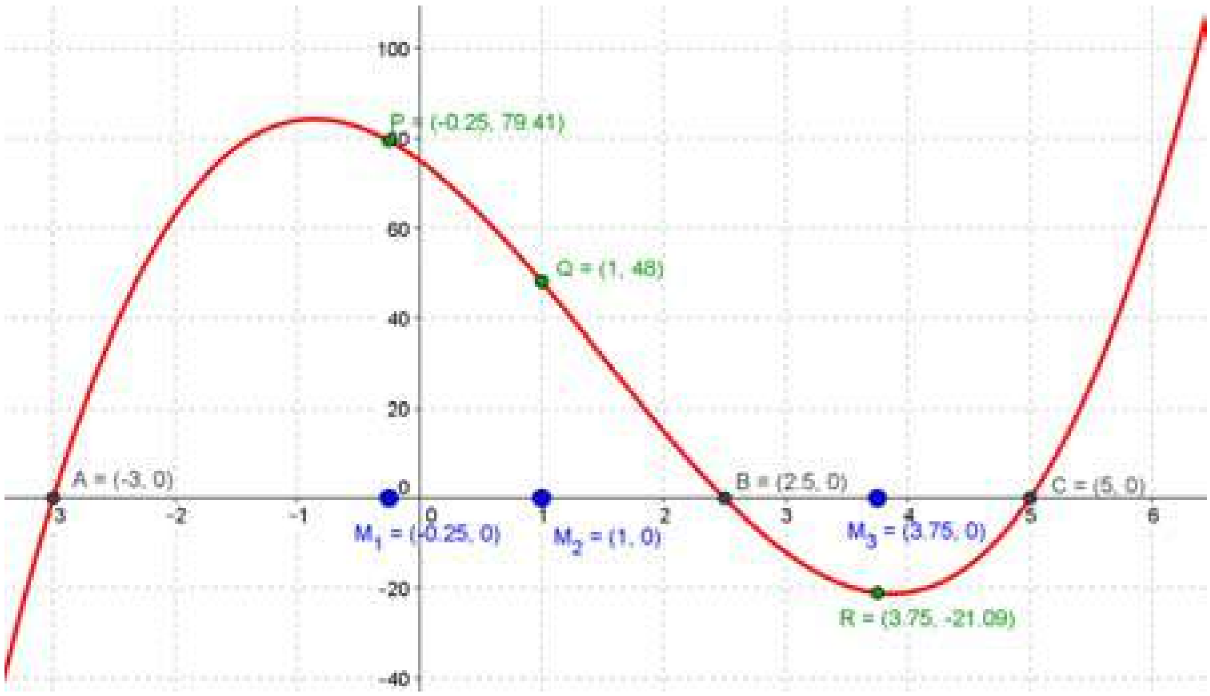
$f(x_{M3}) = f(3,75) = 2 \cdot (3,75)^3 - 9 \cdot (3,75)^2 - 20 \cdot (3,75) + 75 = -21,09$

Todos los puntos pueden verse en la imagen que sigue:

Puntos, en color negro, cuyas abscisas son las raíces: A (- 3, 0); B (2,5; 0) y C (5, 0).

Puntos, en color azul, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces: M_1 (- 0,25; 0); M_2 (1, 0) y M_3 (3,75; 0).

Puntos, en color verde, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las raíces y están sobre la gráfica de la función: P (- 0,25; 79,41); Q (1, 48) y R (3,75; - 21, 09).



Para hallar las ecuaciones de las tangentes en los puntos P, Q y R, hallamos los valores de las pendientes de las tangentes citadas. La derivada de la función y = f (x) es $f'(x) = 6x^2 - 18x - 20$.

Las pendientes de las tangentes son:

$m_P = f'(-0,25) = 6 \cdot (-0,25)^3 - 18 \cdot (-0,25) - 20 = -15,13$

$m_Q = f'(1) = 6 \cdot 1 - 18 \cdot 1 - 20 = -32$

$m_R = f'(3,75) = 6 \cdot (3,75)^3 - 18 \cdot (3,75) - 20 = -3,13$

Hallamos las ecuaciones de las rectas tangentes.

En el punto P (- 0,25; 79,41): $y - 79,41 = -15,13 \cdot (x + 0,25) \Rightarrow$ **$y = -15,13x + 75,63$**

Comprobamos que pasa por el punto C (5, 0): y (5) = - 15,13 · 5 + 75, 63 = 0

En el punto Q (1, 48): y – 48 = - 32 · (x - 1) $\Rightarrow$ **y = - 32x + 80**

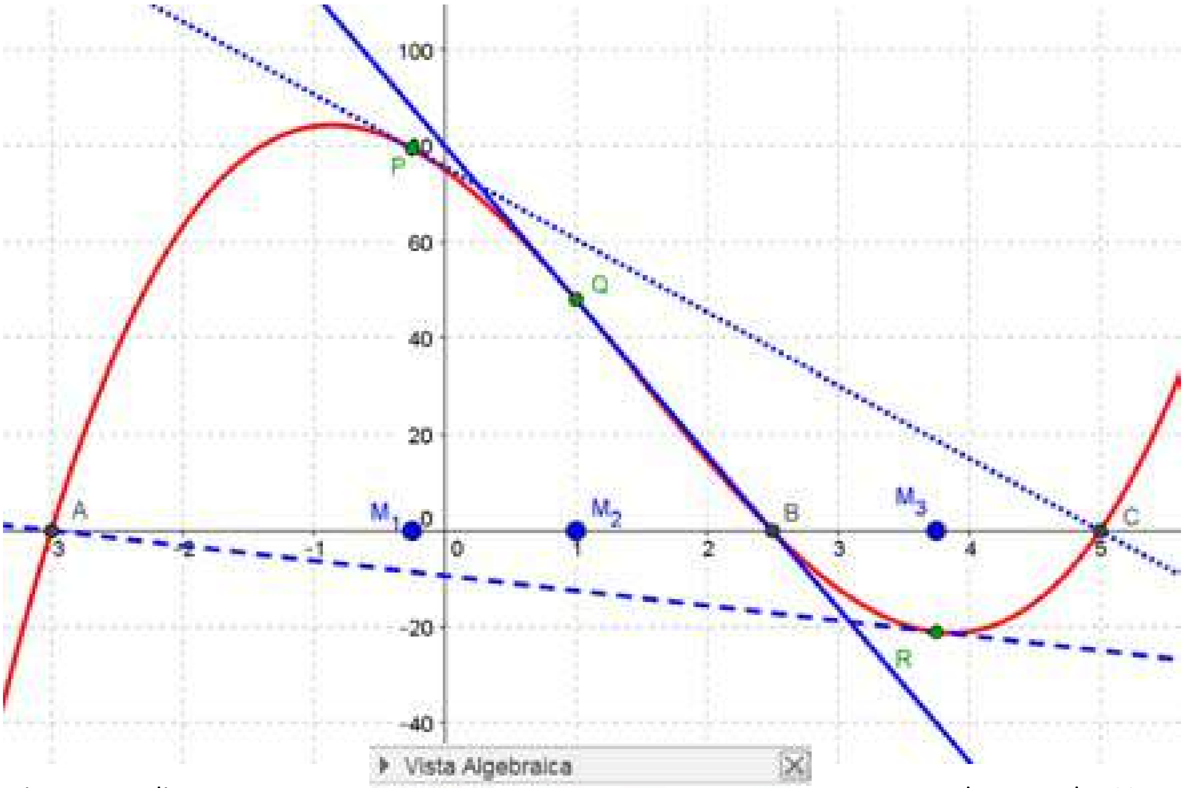
Comprobamos que pasa por el punto B (2,5; 0): y (2,5) = - 32 · 2,5 + 80 = 0

En el punto R (3,75; - 21, 09): y + 21,09 = - 3,13 · (x – 3,75) $\Rightarrow$ **y = - 3,13x – 9,37**

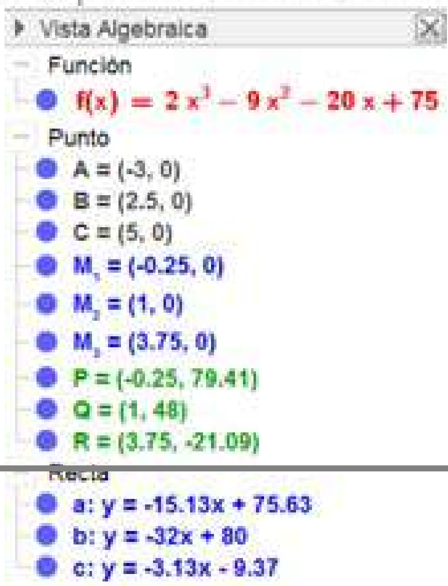
Comprobamos que pasa por el punto A (- 3, 0): y (- 3) = - 3,13 · (- 3) +- 9,35 = 0

Observamos que la recta tangente en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasa por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Todo lo anterior puede verse en la imagen que sigue: La recta tangente en P (en trazo punteado) pasa por el punto C. La tangente en Q (en trazo continuo) pasa por el punto B y la tangente en R (en trazo discontinuo) pasa por el punto A.



En la imagen adjunta, que se corresponde con la Ventana Algebraica, pueden verse la ecuación de la de la función (en rojo), los puntos con sus coordenadas (en negro, azul y verde) y las ecuaciones de las rectas tangentes (en color azul)



2. Para poder observar si ocurre lo mismo con otras funciones cúbicas similares explicamos la construcción realizada con GeoGebra en el apartado anterior, que debe servirnos para cualquier función cúbica que tenga tres raíces reales y distintas. Los pasos a seguir con GeoGebra:

1º Introducimos y representamos la función cúbica y = f (x).

2º Con la herramienta **Desplaza Vista Gráfica** ajustamos la ventana gráfica de forma que aparezca la gráfica de la función con sus puntos notables (máximo, mínimo y punto de inflexión), así como los cortes de la gráfica con el eje OX.

3º Usando la herramienta **Intersección** hallamos los puntos A, B y C, intersección de la gráfica con el eje OX, cuyas abscisas son las raíces de la función cúbica.

4º Utilizando la herramienta **Punto Medio o Centro** determinamos los puntos M_1, M_2, y M_3, sobre el eje OX, cuyas abscisas son las medias aritméticas de las abscisas de los puntos A y B, A y C, B y C, respectivamente.

5º Dibujamos los puntos P, Q y R sobre la gráfica de y = f (x) tecleando en la ventana de entrada:

Para el punto P, tecleamos: $P = \left(x\left(M\_1\right),\ f\left(x\left(M\_1\right)\right)\right)$.

Para el punto Q, tecleamos: $Q = \left(x\left(M\_2\right),\ f\left(x\left(M\_2\right)\right)\right)$.

Para el punto R, tecleamos: $R = \left(x\left(M\_3\right),\ f\left(x\left(M\_3\right)\right)\right)$.

6º Finalmente, con la herramienta, **Tangentes**, dibujamos las rectas tangentes a la gráfica de y = f (x) en los puntos P, Q y R.

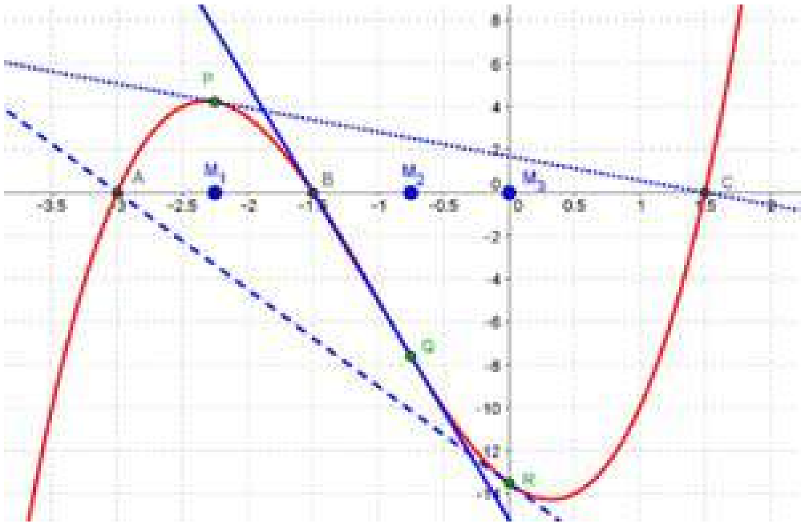
7º En las **Propiedades de los objetos** (función, puntos, rectas) ponemos el color, estilo… a nuestro gusto.

En la imagen puede verse los resultados obtenidos para la función f (x) = $2x^3 + 6x^2 - 4{,}5x - 13{,}5$.

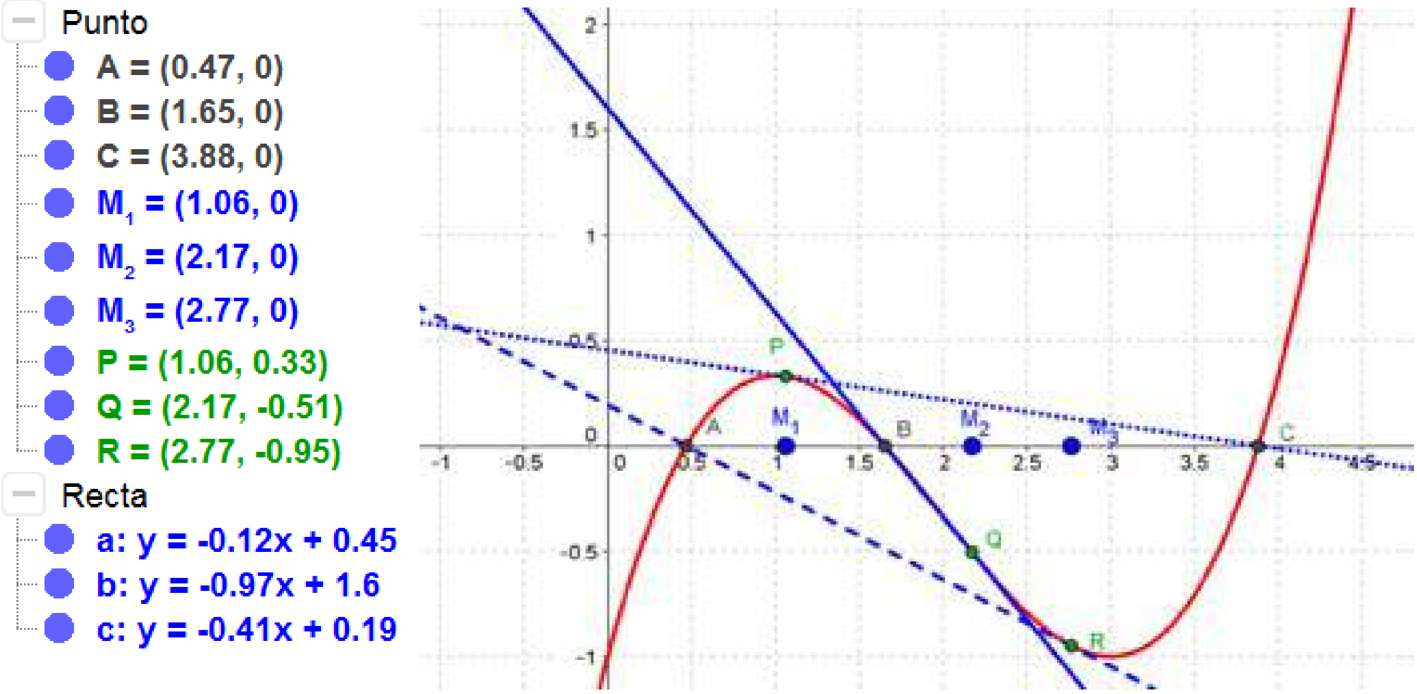
Los puntos son:

A (- 3, 0); B (- 1,5; 0); C (1,5; 0); M_1 (- 2,25; 0); M_2 (- 0,75; 0); M_3 (0, 0); P (- 2,25; 4,22); Q (- 0,75; - 7,59) y Q (0, - 13,5).

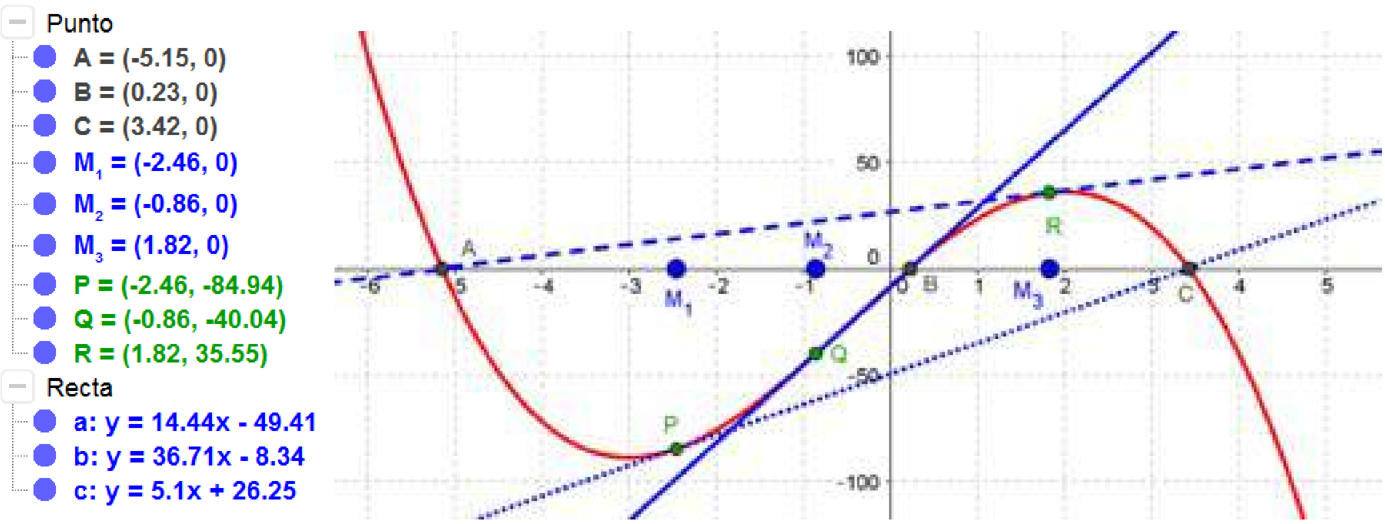
Las rectas tangentes son: En P: y = - 1,13x + 1,69. En Q: y = - 10,13x – 15,19. En R: y = - 4,5x – 13,5.



En las imágenes pueden verse los resultados obtenidos para f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.



Por último, mostramos lo que ocurre con la función f (x) = - $2x^3 - 3x^2 + 36x - 8$.



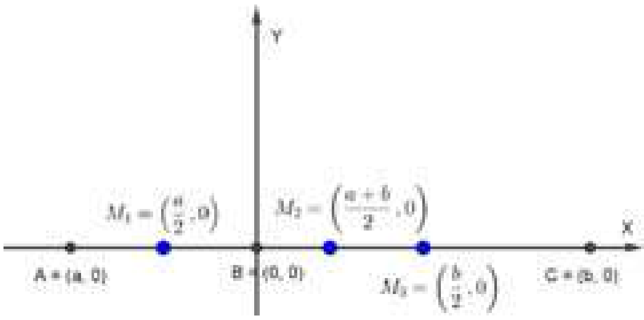
Intentamos probar que:

En las funciones cúbicas con tres raíces reales y distintas, las rectas tangentes en los puntos de la gráfica cuya abscisa es la media aritmética de dos cualesquiera de las raíces pasan por el punto del eje OX cuya abscisa en la tercera raíz.

Consideramos, sin pérdida de generalidad, una función cúbica con tres raíces reales y distintas, a, 0 y b, es decir, que la gráfica de la función cúbica corta al eje OX en los puntos A (a, 0), B (0, 0) y C (b, 0).

Los puntos del eje OX cuyas abscisas son las medias aritméticas de los puntos anteriores son:

$$M_1\left(\frac{a}{2}, 0\right);\ M_2\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)\ y\ M_3 = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$$



Todo esto puede verse en la imagen adjunta.

La expresión de la función cúbica es f (x) = (x – a) · x · (x – b), es decir, f (x) = $x^3 - (a + b)\, x^2 + abx$.

Hallamos las ordenadas de los puntos $P\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right); Q\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\ y\ R\left(\frac{b}{2}, f\left(\frac{b}{2}\right)\right)$:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - (a+b)\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ab\frac{a}{2} = \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{4} - \frac{a^2 b}{4} + \frac{a^2 b}{2} = \ldots = \frac{2a^2 b - a^3}{8}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - (a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab\frac{a+b}{2} = \ldots = -\frac{(a+b)\,(a-b)^2}{8}$$

$$f\left(\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}\right)^3-(a+b)\left(\frac{b}{2}\right)^2+ab\frac{b}{2}=\frac{b^3}{8}-\frac{b^3}{4}-\frac{ab^2}{4}+\frac{ab^2}{2}=\ldots=\frac{2ab^2-b^3}{8}$$

La derivada de la función f (x) = x^3 – (a + b) x^2+ abx es f ´ (x) = $3x^2$ – 2(a + b) x + ab.

Veamos que la recta tangente en el punto P coincide con la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ es:

$$m_P=f\,'\left(\frac{a}{2}\right)=3\left(\frac{a}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a}{2}\right)+ab=\frac{3a^2}{4}-a^2-ab+ab=-\frac{a^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\left(\frac{a}{2},\frac{2a^2b-a^3}{8}\right)$ y C (b, 0) es:

$$m_{PC}=\frac{y_C-y_P}{x_C-x_P}=\frac{0-\frac{2a^2b-a^3}{8}}{b-\frac{a}{2}}=\frac{-\frac{2a^2b-a^3}{8}}{\frac{8b-4a}{8}}=\ldots=-\frac{a^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto P, las rectas coinciden.
Veamos que la recta tangente en el punto Q coincide con la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ es:

$$m_Q=f\,'\left(\frac{a+b}{2}\right)=3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-2(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)+ab=\ldots=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $Q\left(\frac{a+b}{2},-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)$ y B (0, 0) es:

$$m_{QBC}=\frac{y_B-y_Q}{x_B-x_Q}=\frac{0-\left(-\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\right)}{0-\frac{a+b}{2}}=\frac{\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}}{\frac{4(a+b)}{8}}=\ldots=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto Q, las rectas coinciden.

Por último, veamos que la recta tangente en el punto R coincide con la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2},\frac{2ab^2-b^3}{8}\right)$ y A (a, 0).

La pendiente de la recta tangente en el punto $R\left(\frac{b}{2}, \frac{2ab^2 - b^3}{8}\right)$ es:

$$m_R = f\,'\left(\frac{b}{2}\right) = 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2(a+b)\left(\frac{b}{2}\right) + ab = \frac{3b^2}{4} - b^2 - ab + ab = -\frac{b^2}{4}.$$

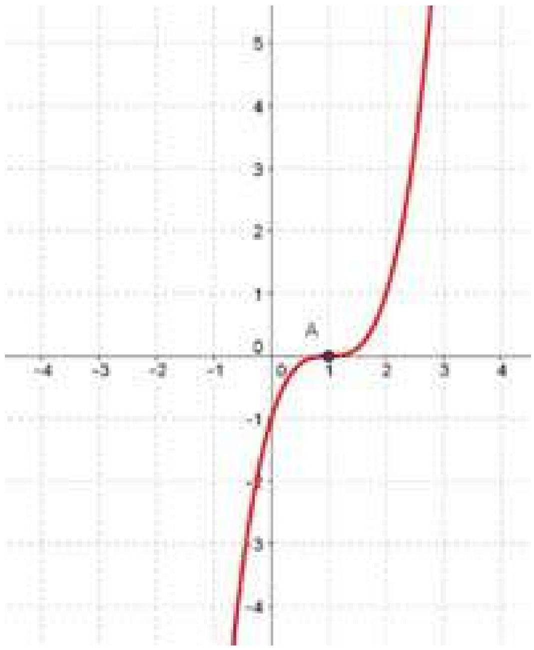
La pendiente de la recta que pasa por los puntos $R\left(\frac{b}{2}, \frac{2ab^2 - b^3}{8}\right)$ y A (a, 0) es:

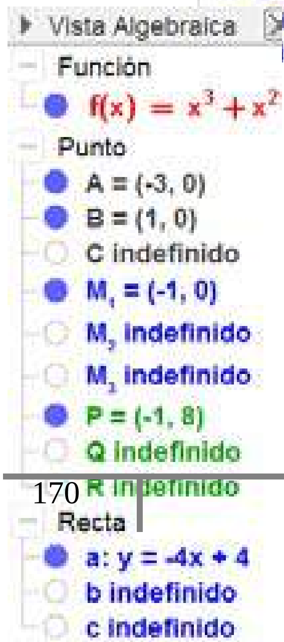
$$m_{RA} = \frac{y_R - y_A}{x_R - x_A} = \frac{\frac{2ab^2 - b^3}{8} - 0}{\frac{b}{2} - a} = \frac{\frac{2ab^2 - b^3}{8}}{\frac{4b - 8a}{8}} = \ldots = -\frac{b^2}{4}.$$

Las pendientes de las rectas coinciden y como ambas pasan por el punto R, las rectas coinciden. Con esto queda probado lo que pretendíamos.

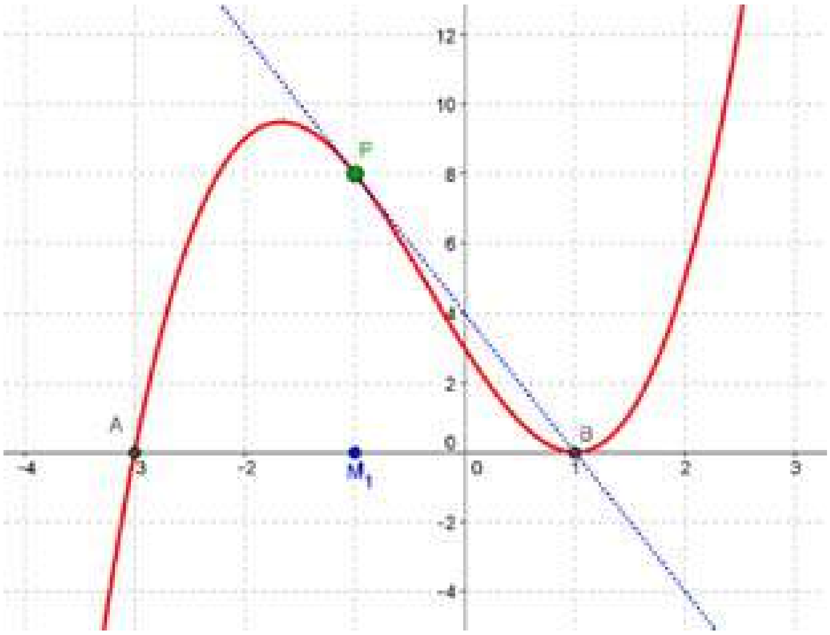
3. Investigamos las propiedades anteriores con funciones cúbicas que tengan: (a) una raíz triple, (b) dos raíces reales, una de ellas doble, o (c) una raíz real y dos raíces complejas.

(a) En el caso de una función cúbica con una raíz triple, por ejemplo: f (x) = $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ solo existe un punto de corte (los tres puntos, A, B y C coinciden en uno sólo) y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.





(b) En el caso de una función cúbica con dos raíces reales, una de ellas doble, por ejemplo: f (x) = $(x + 3) \cdot (x - 1)^2 = x^3 + x^2 - 5x + 3$, existen dos puntos de corte, A y B (el tercer punto C ha coincidido con uno de los anteriores), por tanto, existe uno de los puntos M_i con su correspondiente punto sobre la gráfica y su recta tangente que, puede observarse en la imagen que sigue pasa por el punto doble.



(c) En el caso de una función cúbica con una raíz real y dos raíces complejas, por ejemplo, las raíces 3, 2i y –2i, que dan lugar a la función: f (x) = (x – 3) · (x² + 4) = x³ – 3x² + 4x – 12 solo existe un punto de corte y, por tanto, el resto de elementos (puntos y rectas) no están definidos. Puede observarse en las imágenes que siguen.