UNIDAD 11: Formas de contar. Números para contar

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 270

1. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras podemos formar?

Son todos los números de la forma abcba.

La primera cifra puede ser ocupada por cualquier dígito del 1 al 9. Las cifras segunda y tercera pueden ser ocupadas por cualquier dígito del 0 al 9. Las cifras cuarta y quinta van obligadas por las dos anteriores.

Por el principio de multiplicación obtenemos $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números capicúas de 5 cifras que podemos formar.

2. Con tres pesas de 1, 2 y 3 kg ¿Cuántas pesadas distintas podemos hacer?

Podemos hacer 3 pesadas de una pesa cada una, 3 pesadas de dos pesas cada una y 1 pesada con las tres pesas. En total podemos hacer 7 pesadas diferentes.

Son $C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} = 7$.

3. ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con todas las letras de la palabra ROMA?

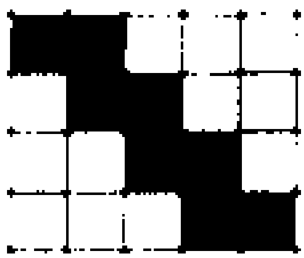
Con todas las letras de la palabra ROMA podemos formar $P_4 = 24$ palabras distintas.

4. Cinco amigos, dos chicas y tres chicos van al cine y se sientan en una fila en la que hay cinco butacas. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar si las chicas se sientan juntas?

Llamamos A y B a las chicas y a,b,c a los chicos.

Una situación es ABabc. Las chicas se pueden permutar entre ellas y moverse en 4 posiciones ABabc, aABbc, abABc y abcAB y los chicos se pueden permutar entre ellos. Entonces todas las situaciones posibles son $P_2 \cdot P_3 \cdot 4 = 48$ formas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 283



1. Diagonal y cuadrados. En el rectángulo del dibujo, de orden 5 x 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal en un rectángulo de orden a x b?

La solución queda:

Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando a (altura) y b (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

a x b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	4	3	6	7	6
4	4	4	6	4	8	8
5	5	6	7	8	5	10
6	6	6	6	8	10	6

En el elemento en el que se cruzan la fila a con la columna b aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensiones a x b, por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4 x 3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

● El número de cuadrados pequeños que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden a x b es igual a: a + b – 1, si a y b son primos entre sí.

● Si los números a y b nos son primos entre sí, entonces el número es: a + b – d, siendo d el máximo común divisor de a y b.

2. Producto de tres números. Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.

El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n (n + 1) (n + 2)$.

Por otra parte son válidas las siguientes desigualdades:
$n^3 < n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$

La desigualdad primera $n^3 < n (n + 1) (n + 2)$, es decir $n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

Para probar la segunda $n (n + 1) (n + 2) < (n + 1)^3$, basta comprobar que: $n (n + 2) < (n + 1)^2$.

Pero esto también es inmediato por que: $n (n + 2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Luego el número $n (n + 1) (n + 2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

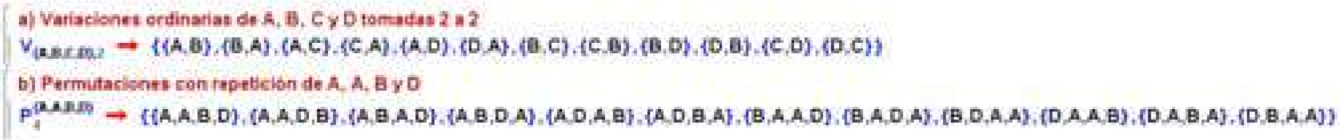
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 284

1. Determina las agrupaciones que se describen a continuación:

a) Las variaciones ordinarias de las letras A, B, C y D tomadas dos a dos.

b) Las permutaciones con repetición de las letras A, A, B y D.

En la imagen pueden verse las agrupaciones que pueden formarse en cada apartado.


a) Variaciones ordinarias de A, B, C y D tomadas 2 a 2

$V_{\{A,B,C,D\},2} \rightarrow$ {{A,B},{B,A},{A,C},{C,A},{A,D},{D,A},{B,C},{C,B},{B,D},{D,B},{C,D},{D,C}}

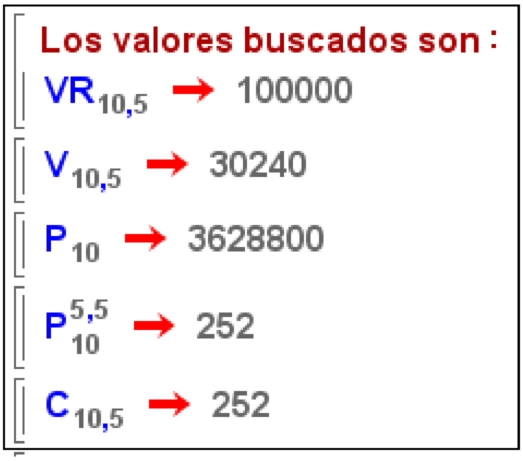
b) Permutaciones con repetición de A, A, B y D

$P_4^{\{A,A,B,D\}} \rightarrow$ {{A,A,B,D},{A,A,D,B},{A,B,A,D},{A,B,D,A},{A,D,A,B},{A,D,B,A},{B,A,A,D},{B,A,D,A},{B,D,A,A},{D,A,A,B},{D,A,B,A},{D,B,A,A}}

2. Calcula:

a) $VR_{10,5}$ **b)** $V_{10,5}$ **c)** P_{10} **d)** $P_{10}^{5,5}$ **e)** $C_{10,5}$

En la imagen aparecen las soluciones.


Los valores buscados son :

$VR_{10,5} \rightarrow 100000$

$V_{10,5} \rightarrow 30240$

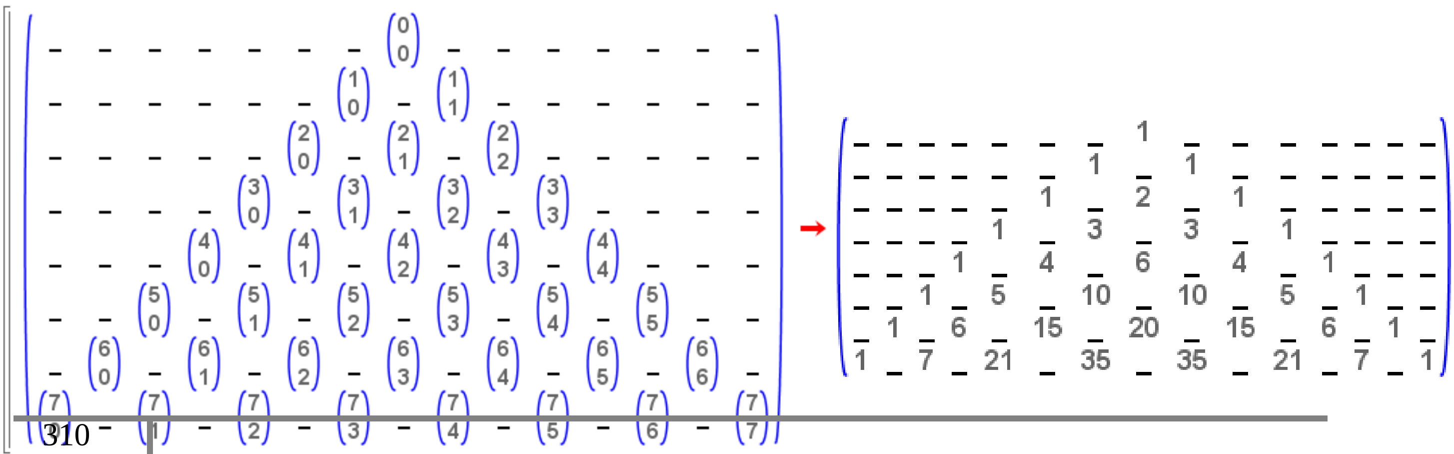
$P_{10} \rightarrow 3628800$

$P_{10}^{5,5} \rightarrow 252$

$C_{10,5} \rightarrow 252$

3. Construye las ocho primeras filas del triángulo de Pascal.

Procediendo como se indica en las páginas de Nuevas Tecnologías y en el epígrafe TRIÁNGULO DE PASCAL, obtenemos:


$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\ \binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} \\ \binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \\ 1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1 \end{pmatrix}$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 285

4. Calcula: a) $VR_{8,\,4}$ b) P_8 c) $C_{8,\,4}$ d) $P_8^{6,\,2}$ e) $P_8^{5,\,3}$ f) $P_8^{4,\,4}$

Activando las opciones del menú **MATH PRB** obtenemos los valores que pueden verse en las imágenes:

a) $VR_{8,\,4} = 8^4 = 4096$

b) $P_8 = 8! = 40320$

c) $C_{8,\,4} = 70$

d) $P_8^{6,\,2} = \dfrac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$

e) $P_8^{5,\,3} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$

f) $P_8^{4,\,4} = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$

```
8^4
                4096
8!
               40320
8 nCr 4
                  70
█
```

```
8 ! / (6 ! * 2 !)
                  28
8 ! / (5 ! * 3 !)
                  56
8 ! / (4 ! * 4 !)
                  70
█
```

5. Halla el valor de todos los números combinatorios de la fila novena del triángulo de Pascal.

En el menú **MATH PRB** activamos la opción **3 : nCr** tecleando la expresión: 8 nCr {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} y obtenemos:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

6. Calcula los valores de las agrupaciones y los números que se describen a continuación:

a) Las variaciones ordinarias de 6 elementos tomados de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 4 en 5 y 6 en 6.

b) Las variaciones ordinarias de 10, 11, 12, 13 y 14 elementos tomados de 2 en 2.

c) Los números factoriales 5!, 6!, 7!, 8!, 9! y 10!.

a) En el menú MATH PRB tecleamos 6 nVr {1, 2, 3, 4, 5, 6} y obtenemos:

6 30 120 360 720 720.

b) En el menú MATH PRB tecleamos {10, 11, 12, 13, 14} nVr 2 y obtenemos:

90 110 132 156 182.

c) En el menú MATH PRB tecleamos {5, 6, 7, 8, 9, 10}! y obtenemos:

120 720 5040 40320 362880 3628800.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 288

1. Lanzamos dos dados al aire. ¿De cuántas formas diferentes podemos obtener siete o nueve puntos?

En total son: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3),(5,2),(6,1),(3,6),(4,5),(5,4) y (6,3). Es decir, 10 formas distintas.

2. ¿En cuántas familias de cuatro hijos hay dos varones y dos mujeres?

En total hay 16 familias distintas de 4 hijos. De ellas hay 6 que tienen dos varones y 2 mujeres y son:

(v,v,m,m) , (v,m,v,m) , (v,m,m,v), (m,v,m,v), (m,v,v,m), (m,m,v,v)

Con combinatoria es: Entre y todas las familias posibles $VR_{2,4} = 16$ familias hay $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

3. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden escribirse con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9? ¿Cuántos de ellos serán múltiplos de 5? ¿Cuántos serán mayores de 500?

Se pueden escribir $V_{5,\,3} = 60$ números.

Serán múltiplos de 5 los que terminen en la cifra 5: $V_{4,\,2} = 12$ números.

Serán mayores de 500 los que empiecen por 5 o por 7 o por 9: $3 \cdot V_{4,\,2} = 36$ números.

4. El número PIN de un teléfono móvil está formado por cuatro dígitos seguidos. ¿Cuántos números distintos podemos formar de este modo?

Podemos formar $VR_{10,\,4} = 10\,000$ números PIN

5. Con los diez dígitos formamos números de cinco cifras:

a) ¿Cuántos de ellos tendrán todas sus cifras distintas?

b) En el caso anterior ¿cuántos serán pares?

c) ¿Cuántos números de cinco cifras podemos formar?

a) Serán todos los que se pueden formar con 10 dígitos menos los que empiecen por 0 que no son números de 5 cifras sino de 4: $V_{10,\,5} – V_{9,\,4} = 27\,216$ números.

b) Serán pares los que terminen en 0, en 2, en 4, en 6 o en 8 y son: $5 \cdot V_{9,\,4} – 4 \cdot V_{8,\,3} = 13\,776$ números.

c) En este caso las cifras pueden ser distintas o repetidas y podremos formar: $9 \cdot VR_{10,\,4} = 90\,000$ números

6. Las matriculas de vehículos en España están formadas por cuatro dígitos y tres letras, por ejemplo 0438AHK. ¿Cuántas matriculas distintas se pueden hacer de esta forma?

En este caso se pueden repetir los dígitos y las letras por lo que serán: $VR_{10,\,4} \cdot VR_{27,\,3}$ = 196 830 000 de matriculas diferentes.

7. En la asamblea anual de una comunidad de vecinos asisten 20 vecinos y deben elegir Presidente y Secretario ¿Cuántas formas distintas tienen de hacerlo?

Tienen $V_{20,\,2}$ = 380 formas distintas.

8. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir seis cartas de una baraja española de 40 cartas en los siguientes casos?:

a) Sin reemplazar las cartas al mazo. **b) Reemplazando las cartas al mazo.**

a) Hay $V_{40,\,6} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35$ = 2 763 633 600

b) Si se pueden ir reemplazando las cartas hay $VR_{40,\,6} = 40^6$ = 4 096 000 000

9. Nueve amigos, 4 chicas y 5 chicos, van al estadio a ver un partido de futbol. Se sientan en una grada que tiene 9 asientos. Halla:

a) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?

b) ¿De cuántas si las chicas se quieren sentar juntas y los chicos también?

a) Se pueden sentar de $P_9 = 9!$ = 362 880 formas distintas.

b) En este caso hay $P_4 \cdot P_5 \cdot P_2$ = 5760 formas distintas.

10. Juan dispone de 4 novelas de aventuras, 6 de ciencia ficción y 3 policiacas para colocar en la estantería de su habitación. Halla:

a) ¿De cuántas maneras distintas puede colocar sus libros?

b) ¿De cuántas si quiere que las novelas de aventuras estén juntas en primer lugar?

c) ¿De cuántas si quiere que estén juntas las del mismo género?

a) Los puede colocar de $P_{13} = 13!$ = 6 227020 800 maneras distintas.

b) En este caso hay $P_4 \cdot P_9 = 4! \cdot 9!$ = 8 709 120 maneras distintas.

c) En este caso hay $P_4 \cdot P_6 \cdot P_3 \cdot P_3 = 4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 3!$ = 622 080 maneras distintas.

11. ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, podemos formar con las letras de la palabra MURCIELAGO? ¿Cuántas de ellas empiezan por M y terminan en O?

Podemos formar $P_{10} = 10!$ = 3 628 800 palabras distintas. Empiezan por M y terminan en O: $P_8 = 8!$ = 40 320 palabras distintas

12. Un Byte está formado por una secuencia de 8 digitos, ceros y unos.¿Cuántos bytes distintos podemos formar? ¿Cuántos empezarán y terminaran por 1?¿Cuántos tendrán 3 unos y el resto ceros?

Podemos formar $VR_{2,\,8}$ = 256 bytes distintos.

Empezarán y terminarán en 1: $VR_{2,\,6}$ = 64 bytes distintos

Tendrán 3 unos y 5 ceros: $P_8^{3,5} = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

13. Un pintor mezcla colores con sus botes de pintura. Dispone de los siete colores del arco iris, ¿cuántas mezclas de tres colores puede obtener?

Puede hacer $C_{7,3}$ = 35 colores diferentes

14. Un opositor se examina de 70 temas y le sacan por sorteo 4 temas que debe hacer. ¿Cuántos exámenes distintos puede tener? ¿Cuántos si de los 10 primeros sacan 1?

Puede hacer $C_{70,\,4}$ = 916 895 exámenes distintos.

En este caso puede hacer $C_{10,1} \cdot C_{60,3}$ = 342 200 exámenes distintos.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 289

15. ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono? ¿Y un polígono de n lados?

Un dodecágono tiene $C_{12,\,2}$ – 12 lados = 54 diagonales.

Un polígono de n lados tiene $C_{n,\,2}$ – n lados = $\dfrac{n^2-3n}{2} = \dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonales.

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $V_{x,\,4} = 20 \,.\, V_{x,\,2}$

b) $\binom{42}{x+3} = \binom{42}{2x-6}$

c) $\binom{x}{6} + \binom{15}{y} = \binom{z}{7}$

d) $P_x = 6\, P_{x-2}$

e) $VR_{x,\,2} = 5 + V_{x,\,2}$

f) $\binom{2x^2}{9x-18} = \binom{2x^2}{7x-12}$

g) $V_{x,2} - C_{x,2} = 190$

h) $C_{x,4} = 20\, C_{x,2}$

a) La expresión se convierte en la ecuación x · (x - 1) · (x - 2) · (x - 3) = 20 · x · (x - 1); cuya solución es x = 7.

b) Obtenemos la ecuación x + 3 + 2x - 6 = 42, cuya solución es x = 15.

c) Los valores de las incógnitas son x = 15; y = 7; z = 16.

d) La solución de la ecuación x! = 6 · (x - 2)! es x= 3.

e) Obtenemos la ecuación $x^2 = 5 + x\cdot (x - 1)$ con solución x = 5.

f) Las soluciones de la ecuación $(9x -18) + (7x – 12) = 2x^2$ son x = 5 y x = 3.

g) Obtenemos la ecuación $x \cdot \left(x-1\right) - \frac{x!}{2! \cdot \left(x-2\right)!} = 190$ con solución x = 20.

h) La solución de la ecuación $\frac{x!}{4! \cdot \left(x-4\right)!} = 20 \cdot \frac{x!}{2! \cdot \left(x-2\right)!}$ es x = 18.

17. ¿Cuántos números de teléfono de 9 cifras se pueden formar si la primera cifra debe ser un 9? ¿Cuántos si las tres primeras cifras deben ser 975?

Si la primera cifra ha de ser un 9 se pueden formar: $VR_{10,\,8} = 10^8$ = 100 000 000 números de teléfono.

Si las tres primeras han de ser 975 se pueden formar: $VR_{10,\,6} = 10^6$ = 1 000 000 números de teléfono.

18. Para hacer una apuesta de lotería primitiva hay que marcar con cruces seis números de un boleto en el que figuran los números del 1 al 49. ¿Cuántos boletos hay que rellenar para tener la seguridad de ganar?

Hay que rellenar $C_{49,\,6}$ = 13 983 816 boletos distintos.

19. Un estudiante tiene 10 autobuses distintos para ir al instituto y los mismos para volver. ¿De cuántas formas puede hacer el viaje de ida y vuelta si no puede ir y volver en el mismo? ¿Y si puede ir y volver en el mismo?

En el primer caso tiene $V_{10,\,2}$ = 90 formas distintas.

En el segundo caso tiene $VR_{10,\,2}$ = 100 formas distintas.

20. Tiramos 6 monedas distintas al aire, ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener? ¿en cuántos aparecen 4 caras y 2 cruces?

Podemos obtener $VR_{2,\,6}$ =64 resultados distintos.

Si han de aparecer 4 caras y 2 cruces podemos obtener $P_6^{4,2}$ = 15 resultados distintos.

21. Los expedientes de los alumnos de un centro de enseñanza están formados por tres letras elegidas entre las 27 del abecedario y un número de tres cifras distintas. ¿Cuántos números de expedientes distintos puede haber?

Se pueden hacer $VR_{27,\,3} \cdot 9 \cdot V_{9,\,2}$ = 12 754 584 números de expedientes distintos.

22. En un grupo de amigos hay 10 chicos y 8 chicas. Hay dos líderes, un chico y una chica. Se quiere formar una comisión para preparar una fiesta formada por 5 amigos.

a) ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántas si han de entrar 3 chicos y 2 chicas?

c) ¿Cuántas si han de entrar los dos líderes?

d) ¿Cuántas si ha de entrar uno solo de los líderes?

a) En total se pueden formar $C_{18,\,5} = 8568$ comisiones distintas.

b) En este caso se pueden formar $C_{10,\,3} \cdot C_{8,\,2} = 3360$ comisiones distintas.

c) En este caso se pueden formar $C_{9,\,2} \cdot C_{7,\,1} = 252$ comisiones distintas.

d) En este caso se pueden formar $C_{9,\,2} \cdot C_{8,\,2} + C_{10,\,3} \cdot C_{7,\,1} = 1848$ comisiones distintas.

23. Para formar un equipo de baloncesto de 5 jugadores, un club dispone de 12 jugadores. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar? ¿Cuántos si sólo hay 3 que juegan de pívot?

Puede formar $C_{12,\,5} = 792$ equipos distintos.

Si solo hay 3 jugadores que pueden ser pivot se pueden formar: $C_{3,\,1} \cdot C_{9,\,4} = 378$ equipos distintos.

24. En una jaula hay 6 gatos blancos y 8 negros. Salen de la jaula pon un hueco de uno en uno. ¿De cuantas formas distintas pueden salir? ¿De cuántas si han de salir primero los negros y luego los blancos? ¿De cuántas si han de salir juntos los del mismo color?

Pueden salir de $P_{14} = 14! = 87\ 178\ 291\ 200$formas distintas.

Si han de salir primero los negros y luego los blancos pueden hacerlo de $P_8 \cdot P_6 = 8! \cdot 6! = 29\ 030\ 400$ formas distintas.

Si han de salir juntos los del mismo color pueden hacerlo de $P_6 \cdot P_8 \cdot P_2 = 6! \cdot 8! \cdot 2! = 58\ 060\ 800$ formas distintas.

25. Con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 ¿Cuántos productos distintos de 3 dígitos diferentes se pueden formar? ¿Cuántos de esos productos serán pares?

Se pueden hacer $C_{6,\,3} = 20$ productos distintos.

Serán pares los que tengan una, dos o las tres cifras pares: $C_{3,\,1} \cdot C_{3,\,2} + C_{3,\,2} \cdot C_{3,\,1} + C_{3,\,3} = 19$ productos pares.

26. ¿Cuántas quinielas diferentes de 15 resultados es necesario hacer para tener seguridad de ganar? ¿Cuántas tendrán seis doses, cinco unos y cuatro equis?

Hay que hacer $VR_{3,\,15}$ = 14 348 907 quinielas distintas.
Tendrán seis doses, cinco unos y cuatro equis: $P_{15}^{6,5,4} = 630\,630$ quinielas distintas.

27. Un grupo de 10 amigos se reparten 10 viajes que les han tocado en un sorteo ¿De cuántas formas pueden hacerlo? ¿De cuántas si hay 3 viajes a París, 5 a Roma y 2 a Londrés?

Pueden hacerlo de P_{10} = 10! = 3 628 800 formas distintas.

En el caso de que haya 3 viajes a París, 5 a Roma y 2 a Londres, habrá $P_{10}^{3,5,2} = 2\,520$ formas distintas de repartir los viajes.

28. Un comercio dispone de 8 pesas distintas. ¿Cuántas pesadas diferentes puede hacer?

28. Hemos de considerar todos los casos posibles, es decir: Tomar 1 sola pesa, dos pesas, tres pesas, cuatro pesas, cinco pesas, seis pesas, siete pesas u ocho pesas.

Obtenemos $C_{8,\,1} + C_{8,\,2} + C_{8,\,3} + C_{8,\,4} + C_{8,\,5} + C_{8,\,6} + C_{8,\,7} + C_{8,\,8} = 2^8 - 1 = 255$ pesadas diferentes.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 290

1. En una pandilla de 4 amigos ¿cuántas situaciones distintas de fechas de cumpleaños en días de la semana se puede dar?

Considerando que la semana tiene 7 días se pueden dar $VR_{7,\,4}$ = 2041 situaciones diferentes.

2. ¿De cuántas formas se puede elegir la tripulación de un avión formada por 7 personas si se dispone de 12 miembros de los cuales solo 3 son pilotos?

Considerando que debe ir un piloto se pueden dar $C_{3,\,1} \cdot C_{9,\,6}$ = 252 tripulaciones distintas.

3. Un grupo de 50 estudiantes van a un restaurante a comer para celebrar el fin de curso. En el restaurante les presentan el menú formado por 4 platos de primero, 5 de segundo y 3 postres. Uno de los estudiantes comenta que con ese menú puede que todos coman diferente ¿Cómo pudo saberlo?

Con esos platos se pueden hacer $C_{4,\,1} \cdot C_{5,\,1} \cdot C_{3,\,1} = 60$ menús distintos. Como son 50 comensales, pueden comer todos diferentes combinaciones de menú.

4. Un router de una red inalámbrica tiene 6 pilotos que pueden estar en verde (encendidos) o en rojo (apagados). ¿De cuántas formas distintas podemos ver el router? ¿De cuántas si están solo 2 verdes?

Podemos ver el router de $VR_{2,\,6}$ = 64 formas distintas. Si hay solo dos verdes habrá cuatro rojos por lo que podemos ver el router de $P_6^{2,4} = 15$ formas distintas.

5. En una tienda de caramelos hay 16 tipos de gominolas y 10 de caramelos de papel. Queremos comprar una docena se dulces diferentes.

a) ¿De cuántas formas distintas podemos elegir?

b) ¿De cuantas si quiero 9 gominolas y el resto caramelos?

c) ¿De cuántas, del apartado anterior, si hay dos gominolas que no me gustan y cuatro que quiero que me pongan seguro?

a) Podemos elegir de $C_{26,\,12}$ = 9 657 700 formas distintas.

b) En este caso podemos elegir de $C_{16,\,9} \cdot C_{10,\,3}$ = 1 372 800 formas distintas.

c) En este caso podemos elegir de $C_{10,\,5} \cdot C_{10,\,3}$ = 30 240 formas distintas.

6. Resolver la ecuación $V_{x,3} = 4 \cdot V_{x-2,2} + 8 \cdot V_{x-2,1}$

Queda la ecuación $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ que tiene por soluciones x= 1, x = 2 y x = 4. Solo x = 4 es una solución válida.

7. El alfabeto Morse utiliza como símbolos para formar palabras y números (·) y (-). ¿Cuántas palabras distintas de 8 símbolos podemos formar? ¿En cuántas entraran 5 puntos y 3 rayas?

Podemos formar $VR_{2,\,8}$ = 256 palabras distintas.

Tendrán cinco puntos y tres rayas: $P_8^{5,3} = 56$ palabras distintas.

8. Tenemos 4 números distintos positivos y 3 negativos.

a) ¿Cuántos productos positivos distintos de tres factores podemos formar?

b) ¿Cuántos productos negativos distintos de cuatro factores podemos formar?

a) Productos positivos de 3 factores serán aquellos en los que entran 3 números positivos o uno positivo y dos negativos, es decir $C_{4,\,3} + C_{4,\,1} \cdot C_{3,\,2} = 16$.

b) Productos negativos de 4 factores serán aquellos en los que entran 3 números positivos y 1 negativo o uno positivo y 3 negativos, es decir $C_{4,\,3} \cdot C_{3,\,1} + C_{4,\,1} \cdot C_{3,\,3} = 16$.

9. A una feria del libro asisten 6 escritores de novela, 4 de poesía y 2 de ensayo. Para firmar sus libros se colocan en línea recta.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar?

b) ¿De cuántas si han de estar juntos los de poesía en último lugar?

c) ¿De cuántas si han de estar juntos los de la misma especialidad?

a) Se pueden colocar de $P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$ formas distintas.

b) Están los escritores de poesía en último lugar de $P_8 \cdot P_4$ = 967 680 formas distintas.

c) Están juntos los de la misma especialidad de $P_6 \cdot P_4 \cdot P_2 \cdot P_3$ = 207 360 formas distintas.

10. En un plano hay pintados diversos puntos, no habiendo tres en línea recta. Cada uno está unido a los demás por líneas rectas. Si en total contamos 55 líneas rectas ¿cuántos puntos hay dibujados en el plano?

Llamamos x a los puntos que hay. Se debe cumplir la ecuación $C_{x,\,2} = 55$. De aquí obtenemos que hay x = 11 puntos.

11. Con las letras de la palabra ECONOMICAS:

a) ¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con las letras de la palabra?

b) ¿Cuántas de ellas empiezan y terminan en O?

c) ¿En cuántas palabras aparecen las vocales y las consonantes alternas como en la palabra inicial?

a) Se pueden formar $P_{10}^{2,2,1,1,1,1,1,1} = 907\,200$ palabras diferentes.

b) Empiezan y terminan en O: $P_8^{2,1,1,1,1,1,1} = 20\,160$ palabras diferentes.

c) Tienen las vocales y consonantes alternas como en la palabra inicial en: $P_5^{2,1,1,1} \cdot P_5^{2,1,1,1} \cdot P_2 = 7\,200$ palabras distintas.

12. Ocho amigas se deben sentar alrededor de una mesa circular y hay dos que no se pueden sentar juntas por ser hermanas. Halla de cuántas formas se pueden sentar las ocho personas.

Hallamos de cuántas formas se pueden sentar las ocho amigas y restamos los casos en los que dos hermanas se sienten juntas y obtenemos $P_7 - 2 \cdot P_6$ = 3 600 formas distintas.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 291

Desordenaciones

1. Una empresa pequeña tiene cuatro clientes. En las oficinas preparan 4 cartas personalizadas para sus clientes y 4 sobres con las direcciones correspondientes. Meten al azar una carta en cada sobre. ¿Cuántas formas existen en las que ninguna carta llega a su destinatario? ¿Y cuántas en las que llega solo una carta? ¿Y cuántas en las que llegan dos cartas? ¿Y cuántas con tres? ¿Y cuántas en las que todas llegan a su destino?

Estudia las situaciones en las que haya 5 o 6 cartas, así como en las que haya menos cartas. Busca relaciones entre los números que obtienes al responder a las cuestiones que se plantean.

2. Intenta resolver la situación análoga que fue estudiada por Leonhard Euler (1707-1783) en su famosa obra *Introductio in Analysin Infinitorum* que dice así:

Dada cualquier serie de n letras a, b, c, d, e… encuentra de cuántas maneras distintas pueden colocarse sin que ninguna ocupe la posición que ocupaba inicialmente.

Denotando por d_n al número de permutaciones de n letras a, b, c, d… en las que ninguna letra ocupa su posición original, Euler descubrió la relación de recurrencia que permite calcular d_n en función de desordenaciones de órdenes inferiores:
Para n > 2 se verifica: $d_n = (n-1)\cdot\left[d_{n-1} + d_{n-2}\right]$

Euler también descubrió la forma de obtener d_n sin necesidad de conocer las desordenaciones de órdenes inferiores y obtuvo la expresión:
Para n ≥ 1 se verifica:

$$d_n = n!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

¿Podrías encontrar algún razonamiento que permita demostrar las dos expresiones anteriores?

1. Llamamos a las cuatro cartas con los números naturales 1, 2, 3 y 4. Escribimos todas las permutaciones de 4 elementos, 4! = 24, y analizamos los elementos fijos o elementos que conservan su posición natural.

En la tabla aparecen todos los casos. Se han señalado en negrita las permutaciones con todos sus elementos desordenados.

Permutación	Fijos	Permutación	Fijos	Permutación	Fijos	Permutación	Fijos
1234	4	2134	2	3124	1	**4123**	0
1243	2	**2143**	0	**3142**	0	4132	1
1324	2	2314	1	3214	2	4213	1
1342	1	**2341**	0	3241	1	4231	2
1423	1	**2413**	0	**3412**	0	**4312**	0
1432	2	2431	1	**3421**	0	**4321**	0

Para el caso n = 3 obtenemos:

Permutación	Fijos	Permutación	Fijos
123	3	**231**	0
132	1	**312**	0
213	1	**321**	1

Vamos a denotar por **d(n; k)** al número de las permutaciones de 12 … n, con k elementos fijos exactamente; y en particular al número **d(n; 0)** lo denotaremos (por su importancia para calcular los demás) simplemente por $\mathbf{d_n}$ (número de permutaciones desordenadas de n elementos).

Por ejemplo, cuando n = 4, n = 3, n = 2 y n = 1, tenemos:

- d(4; 4) = 1; d(4; 3) = 0; d(4; 2) = 6; d(4; 1) = 8; d_4 = d(4; 0) = 9.

- d(3; 3) = 1; d(3; 2) = 0; d(3; 1) = 3; d_3 = d(3; 0) = 2.

- d(2; 2) = 1; d(2; 1) = 0; d_2 = d(2; 0) = 1.

● d(1; 1) = 1; d_1 = d(1; 0) = 0.

Podemos construir una tabla:

n	d_n	d(n; 1)	d(n; 2)	d(n; 3)	d(n; 4)
1	0	1			
2	1	0	1		
3	2	3	0	1	
4	9	8	6	0	1

Observamos, en primer lugar que, como el número total de permutaciones de 1, 2, … , n es n!, se tiene que la suma de las desordenaciones obtenidas en cada fila suman n!:

$$\sum_{k=0}^{n} d\ (n;\, k) = n! \qquad [1]$$

Por otra parte, una permutación de n elementos con k fijos exactamente se obtiene eligiendo los k elementos fijos de cualquier manera entre los n y obligando a que la permutación de los restantes n - k elementos sea descolocada, luego:

$$d\ (n;\, k) = \binom{n}{k} \cdot d_{n-k} \qquad [2]$$

siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n!}$ el número combinatorio n sobre k.

Con las fórmulas [1] y [2] podríamos ahora determinar las desordenaciones para n = 5 y n = 6 elementos (cartas, letras, etc.).

n	d_n	d(n; 1)	d(n; 2)	d(n; 3)	d(n; 4)	d(n; 5)	d(n; 6)
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

2. A continuación mostramos los razonamientos que permiten obtener las expresiones del enunciado.

Para n > 2 se verifica: $d_n = (n-1) \cdot \left[d_{n-1} + d_{n-2} \right]$

Demostración:

Euler comenzó con n letras ***a, b, c, d, e…*** Al recolocarlas de forma que ninguna de ellas vuelva a su posición original, encontramos que hay n – 1 posibilidades para la primera letra, ya que no puede ser la ***a***. No importa cuál de las otras n – 1 letras ocupe el primer lugar, ya que se aplicaría un razonamiento similar.

En aras de la sencillez, Euler asumió que la primera letra de su nueva disposición fuera la ***b*** y que "cualquiera que fuera el número de posibilidades que uno encuentra cuando la letra ***b*** ocupa la primera posición, éstas se multiplicarían por n – 1 para dar…". Aquí, Euler, aplica el principio de multiplicación.

Por tanto, la nueva permutación empieza con la letra ***b***. Esto llevó a Euler a considerar dos casos: uno en el que la letra ***a*** figura en segunda posición y otro en el que no es así.

Caso 1.
Bajo este supuesto, nuestra secuencia comienza con ***ba…*** Estamos por tanto obligados a colocar las n – 2 letras restantes ***c, d, e…*** de forma que ninguna ocupe a su posición original. Pero éste es el mismo problema con el que empezamos aunque “reducido en dos”. Utilizando la notación anterior, hay d_{n-2} formas de hacer esto.

Caso 2.
Aquí indicamos que la primera letra es ***b*** y la segunda no es ***a***. El reto es volver a colocar las letras ***a, c, d, e…*** en las n – 1 posiciones a la derecha de ***b*** de forma que ni ***c*** ocupe la tercera posición, ni ***d*** a la cuarta, ni ***e*** a la quinta. Más aún, debe ocurrir también que ***a*** no ocupe la segunda posición, ya que estamos en el Caso 2 en el que **a** no puede seguir a ***b***, por que si lo hiciera estaríamos en el Caso 1.

Por tanto, sin contar la letra ***b*** inicial, vemos que el número de permutaciones es exactamente el número de disposiciones de las n – 1 letras ***a, c, d, e, f…*** en las que ninguna ocupa su lugar original. Esto fue llamado antes d_{n-1}.
Por tanto, según los Casos 1 y 2, hay $d_{n-1} + d_{n-2}$ reordenamientos que empiezan por ***b***. Y como hemos visto que hay n – 1 posibilidades para esa primera posición, el número total de permutaciones de n letras sin dejar ninguna en su posición inicial es:

$$d_n = (n-1)\cdot\left[d_{n-1} + d_{n-2}\right]$$

Nota:
Euler descubrió una segunda relación iterativa:

para n ≥ 2, $\mathbf{d_n = n \cdot d_{n-1} + (-1)^n}$ [1]

a partir de los valores obtenidos para n = 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

También dedujo esta última relación de la anterior y viceversa.

Veamos la prueba para la segunda expresión.

Para n ≥ 1 se verifica:

$$d_n = n!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Demostración:

Realizamos la prueba por el método de inducción.

Si n = 1, $d_1 = 0$ que es $1!\cdot\left[1 - \frac{1}{1!}\right]$.

Consideramos que el resultado se cumple para n = k y veamos que es cierto para n = k + 1..

Por la segunda fórmula [1] de iteración de Euler,

$$d_{k+1} = (k+1)\cdot d_k + (-1)^{k+1} =$$

$$=(k+1)\cdot\left(k!\cdot\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}\right]\right)+(-1)^{k+1}=$$

$$=(k+1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right]$$

y la expresión se cumple.

Con este resultado, se ve inmediatamente que el número de desplazamientos de un grupo de seis objetos es:

$$d_6=6!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right]=720-720+360-120+30-6+1=265$$

que es exactamente el resultado que encontramos antes.

De forma análoga, podemos calcular directamente (sin necesidad de iteración) que d_{12} = 176 214 841.