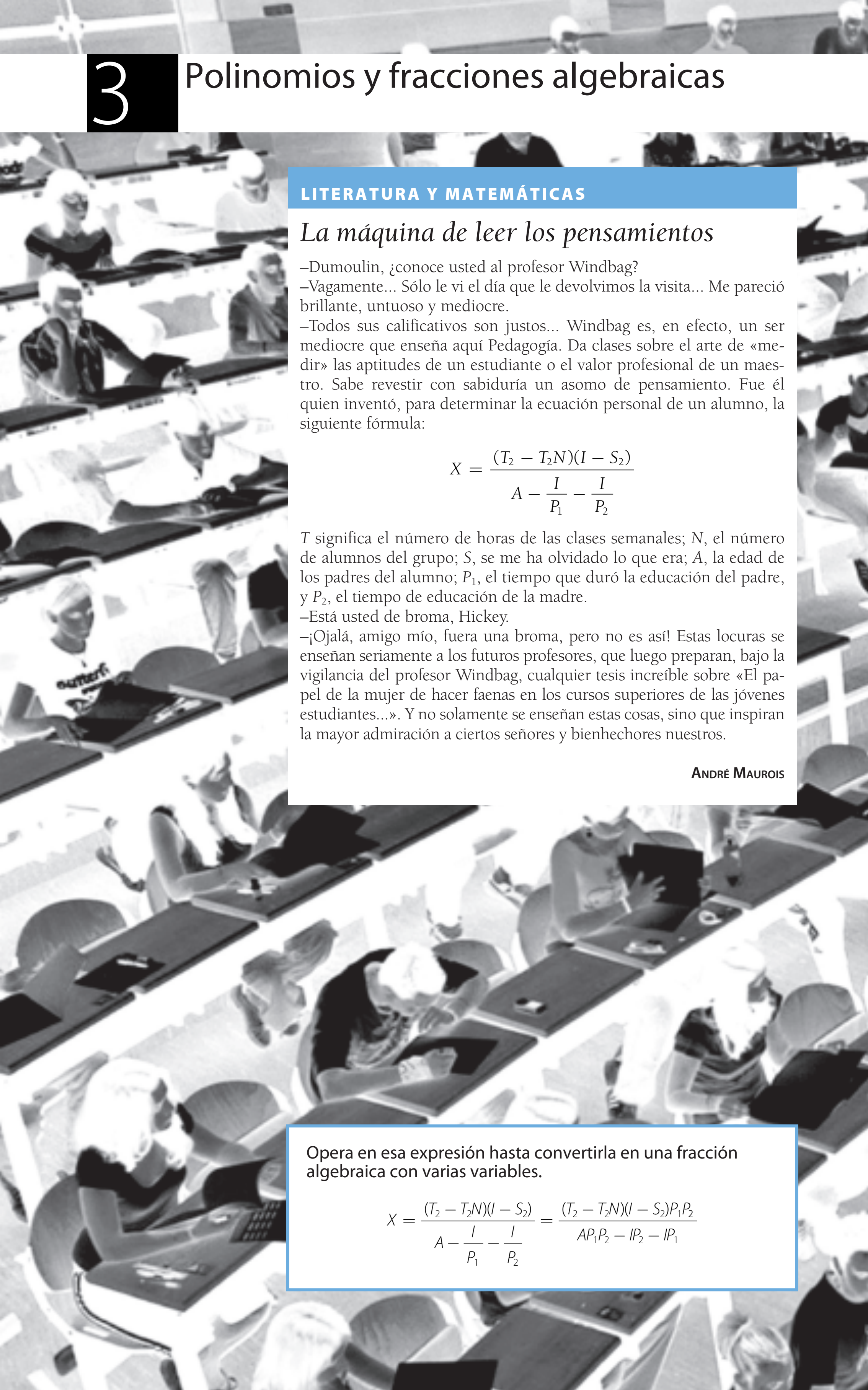


3 Polinomios y fracciones algebraicas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La máquina de leer los pensamientos

–Dumoulin, ¿conoce usted al profesor Windbag?
–Vagamente... Sólo le vi el día que le devolvimos la visita... Me pareció brillante, untuoso y mediocre.
–Todos sus calificativos son justos... Windbag es, en efecto, un ser mediocre que enseña aquí Pedagogía. Da clases sobre el arte de «medir» las aptitudes de un estudiante o el valor profesional de un maestro. Sabe revestir con sabiduría un asomo de pensamiento. Fue él quien inventó, para determinar la ecuación personal de un alumno, la siguiente fórmula:

$$X = \frac{(T_2 - T_2N)(I - S_2)}{A - \dfrac{I}{P_1} - \dfrac{I}{P_2}}$$

T significa el número de horas de las clases semanales; N, el número de alumnos del grupo; S, se me ha olvidado lo que era; A, la edad de los padres del alumno; P_1, el tiempo que duró la educación del padre, y P_2, el tiempo de educación de la madre.
–Está usted de broma, Hickey.
–¡Ojalá, amigo mío, fuera una broma, pero no es así! Estas locuras se enseñan seriamente a los futuros profesores, que luego preparan, bajo la vigilancia del profesor Windbag, cualquier tesis increíble sobre «El papel de la mujer de hacer faenas en los cursos superiores de las jóvenes estudiantes...». Y no solamente se enseñan estas cosas, sino que inspiran la mayor admiración a ciertos señores y bienhechores nuestros.

André Maurois

Opera en esa expresión hasta convertirla en una fracción algebraica con varias variables.

$$X = \frac{(T_2 - T_2N)(I - S_2)}{A - \dfrac{I}{P_1} - \dfrac{I}{P_2}} = \frac{(T_2 - T_2N)(I - S_2)P_1P_2}{AP_1P_2 - IP_2 - IP_1}$$

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios.

a) x
b) $5y$
c) $7z^5$
d) $-4f^8$
e) $2xy^2$
f) $5yzd^3$
g) $7xyz^5$
h) $-4ydf^8$

a) Coeficiente: 1	Parte literal: x	Grado: 1
b) Coeficiente: 5	Parte literal: y	Grado: 1
c) Coeficiente: 7	Parte literal: z^5	Grado: 5
d) Coeficiente: -4	Parte literal: f^8	Grado: 8
e) Coeficiente: 2	Parte literal: xy^2	Grado: 3
f) Coeficiente: 5	Parte literal: yzd^3	Grado: 5
g) Coeficiente: 7	Parte literal: xyz^5	Grado: 7
h) Coeficiente: -4	Parte literal: ydf^8	Grado: 10

002 Indica si los monomios son o no semejantes, y determina su opuesto.

a) xyz, xy e y
b) ab, a^2b y $7b$
c) $87xy^2$ y $7x^2y$

a) No
b) No
c) No

003 Haz estas operaciones.

a) $3xy + 8xy + 9xy$
b) $11a^2b - 15a^2b + 7a^2b$
c) $10xy^2 \cdot 6x^2y$
d) $15x^8 : 3x^3$

a) $20xy$
b) $3a^2b$
c) $60x^3y^3$
d) $5x^5$

004 Aplica la propiedad distributiva en las siguientes expresiones.

a) $7(x + 2)$
b) $3x(x - 5)$
c) $(-2x)(3x^2 - 4x + 7)$
d) $9(x - 4)$

a) $7x + 14$
b) $3x^2 - 15x$
c) $-6x^3 + 8x^2 - 14x$
d) $9x - 36$

005 Saca factor común en las expresiones.

a) $(2n + 2)3n + (2n + 2)6$
b) $4(7n - 7) - (7n - 7)(4n - 8)$

a) $(2n + 2)(3n + 6)$
b) $(7n - 7)(4 - (4n - 8)) = 7(n - 1)(12 - 4n)$

006 Desarrolla las siguientes igualdades notables.

a) $(x + 3y)^2$
b) $(3x^3 - a^2)^2$
c) $(x + x^3)(x - x^3)$

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$
b) $9x^6 - 6x^3a^2 + a^4$
c) $x^2 - x^6$

ACTIVIDADES

001 Dado $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 - 1 - 3x$, reduce este polinomio y halla su valor numérico para:

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = -1$

d) $x = 3$

$P(x) = -4x^2 - 2x + 3$

a) $P(0) = 3$

b) $P(1) = -4 - 2 + 3 = -3$

c) $P(-1) = -4 + 2 + 3 = 1$

d) $P(3) = -36 - 6 + 3 = -39$

002 Reduce los siguientes polinomios y calcula su valor numérico para $x = 2$.

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

a) $P(x) = -4x^2 + x + 5 \rightarrow P(2) = -16 + 2 + 5 = -9$

b) $P(x) = -2x^4 - 4x^2 - 2x - 3 \rightarrow P(2) = -32 - 16 - 4 - 3 = -55$

003 Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$.

a) $P(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

a) $P(1) = 2$

b) $P(1) = 2$

c) $P(1) = 2$

d) $P(1) = 2$

004 Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^n + 1$ para $x = -1$. ¿Qué observas?

$P(x) = x^n + 1 \rightarrow P(-1) = (-1)^n + 1$

Si n es par, entonces: $P(-1) = 1 + 1 = 2$

Si n es impar, entonces: $P(-1) = -1 + 1 = 0$

005 Suma y resta cada par de polinomios.

a) $P(x) = 3x^3 - x - 4$ $\quad Q(x) = x^3 - x^2 + 3$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\quad Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\quad Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

a) $S(x) = (3x^3 - x - 4) + (x^3 - x^2 + 3) = 4x^3 - x^2 - x - 1$

$R(x) = (3x^3 - x - 4) - (x^3 - x^2 + 3) = 2x^3 + x^2 - x - 7$

b) $S(x) = (x^7 - 8x^4 + 3) + (x^5 + 3x^3 - 6) = x^7 + x^5 - 8x^4 + 3x^3 - 3$

$R(x) = (x^7 - 8x^4 + 3) - (x^5 + 3x^3 - 6) = x^7 - x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 9$

c) $S(x) = (10x^4 + x^2 + 1) + (x^5 + 7x^2 - x) = x^5 + 10x^4 + 8x^2 - x + 1$

$R(x) = (10x^4 + x^2 + 1) - (x^5 + 7x^2 - x) = -x^5 + 10x^4 - 6x^2 + x + 1$

006 Halla la suma, la resta y el producto de cada par de polinomios.

a) $R(x) = x^4 - x + 1$ $\quad S(x) = x^2 + 1$

b) $R(x) = x + 1$ $\quad S(x) = x^2 + x - 1$

c) $R(x) = 5x^7 - x^8 + 1$ $\quad S(x) = x^2 + x^6 - 1$

a) $P(x) = (x^4 - x + 1) + (x^2 + 1) = x^4 + x^2 - x + 2$

$Q(x) = (x^4 - x + 1) - (x^2 + 1) = x^4 - x^2 - x$

$$\begin{array}{r} x^4 - x + 1 \\ \times\ x^2 + 1 \\ \hline x^4 \qquad\quad - x + 1 \\ x^6 \qquad - x^3 + x^2 \qquad\quad \\ \hline x^6 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \end{array}$$

b) $P(x) = (x + 1) + (x^2 + x - 1) = x^2 + 2x$

$Q(x) = (x + 1) - (x^2 + x - 1) = -x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ \times\ x + 1 \\ \hline x^2 + x - 1 \\ x^3 + x^2 - x \qquad \\ \hline x^3 + 2x^2 \qquad - 1 \end{array}$$

c) $P(x) = (5x^7 - x^8 + 1) + (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 + x^6 + x^2$

$Q(x) = (5x^7 - x^8 + 1) - (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 - x^6 - x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} -x^8 + 5x^7 + 1 \\ \times\ x^6 + x^2 - 1 \\ \hline x^8 - 5x^7 \qquad\qquad - 1 \\ -x^{10} + 5x^9 \qquad\qquad\qquad\quad + x^2 \qquad \\ -x^{14} + 5x^{13} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + x^6 \qquad\qquad \\ \hline -x^{14} + 5x^{13} - x^{10} + 5x^9 + x^8 - 5x^7 + x^6 + x^2 - 1 \end{array}$$

007 Calcula el resultado de multiplicar los siguientes polinomios.

a) $R(x) = x^3 + x + 1$ $\quad S(x) = 2x$

b) $R(x) = x^3 - 1$ $\quad S(x) = x$

c) $R(x) = x^4 + x$ $\quad S(x) = x + 3$

d) $R(x) = x^5 + 6x + 2$ $\quad S(x) = x^3 + x^2$

a) $P(x) = (x^3 + x + 1)2x = 2x^4 + 2x^2 + 2x$

b) $P(x) = (x^3 - 1)x = x^4 - x$

c) $P(x) = (x^4 + x)(x + 3) = x^4(x + 3) + x(x + 3) =$
$= x^5 + 3x^4 + x^2 + 3x$

d) $P(x) = (x^5 + 6x + 2)(x^3 + x^2) = x^5(x^3 + x^2) + 6x(x^3 + x^2) +$
$+ 2(x^3 + x^2) = x^8 + x^7 + 6x^4 + 6x^3 + 2x^3 + 2x^2 =$
$= x^8 + x^7 + 6x^4 + 8x^3 + 2x^2$

008 Indica el grado del polinomio resultante de esta operación.

$$(x^4 - 2x + 1)(2x^2 - x + 1)$$

Es la suma de los grados: $4 + 2 = 6$.

009 Realiza las siguientes divisiones de polinomios, y señala las que son exactas.

a) $(x - 1) : x$

b) $(x^2 - 1) : (x + 1)$

c) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

d) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1)$

a)
$$\begin{array}{rr|l}
x & -1 & x \\ \cline{3-3}
-x & & 1 \rightarrow \text{No es exacta} \\ \cline{1-2}
 & -1 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & x-1 \rightarrow \text{Es exacta} \\ \cline{1-3}
 & -x & -1 & \\
 & +x & +1 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -5x & +6 & x-2 \\ \cline{4-4}
-x^2 & +2x & & x-3 \rightarrow \text{Es exacta} \\ \cline{1-3}
 & -3x & +6 & \\
 & +3x & -6 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & & +1 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x+2 \rightarrow \text{No es exacta} \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -x & +1 & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}$$

010 Halla las divisiones y luego comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

a) $(x^3 - 1) : x$

b) $(x^3 - 1) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 1) : (x^2 - 2)$

d) $(x^3 - 1) : x^3$

a)
$$\begin{array}{rr|l}
x^3 & -1 & x \\ \cline{3-3}
-x^3 & & x^2 \\ \cline{1-2}
 & -1 &
\end{array}$$

$$x^3 - 1 = x \cdot x^2 - 1$$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\qquad -1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{1-1} \quad -x^2 \qquad -1 & \\ \quad +x^2+x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad x-1 & \\ \qquad\quad -x-1 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -2 & \end{array}$$

$x^3 - 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) - 2 = x^3 + 1 - 2$

c)
$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad -1 & x^2-2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x & x \\ \cline{1-1} \quad 2x-1 & \end{array}$$

$x^3 - 1 = (x^2 - 2)x + 2x - 1 = x^3 - 2x + 2x - 1$

d)
$$\begin{array}{l|l} x^3-1 & x^3 \\ \cline{2-2} -x^3 & 1 \\ \cline{1-1} \quad -1 & \end{array}$$

$x^3 - 1 = x^3 \cdot 1 - 1$

011 Realiza estas divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 5) : (x + 3)$

b) $(x^3 - 10x^2 + 23x - 10) : (x - 3)$

c) $(x^5 - x^4 - x^3 + 2) : (x - 1)$

d) $(-x^6 - x^5 - 6x^3 + 10) : (x + 1)$

e) $(-x^7 + 2x^6 + x^4 - 4x^2 + 7x - 5) : (-x + 2)$

f) $(2x^5 + 6x^4 - x^2 + 9) : (-x - 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 1 & -5 & 2 & -5 \\ -3 & & -3 & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 2x^2 + x - 1$. Resto: -2

b)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -10 & 23 & -10 \\ 3 & & 3 & -21 & 6 \\ \hline & 1 & -7 & 2 & -4 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 7x + 2$. Resto: -4

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Cociente: $x^4 - x^2 - x - 1$. Resto: 1

d)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & -1 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & & 1 & 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ \hline & -1 & 0 & 0 & -6 & 6 & -6 & \boxed{16} \end{array}$$

Cociente: $-x^5 - 6x^2 + 6x - 6$. Resto: 16

e)
$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 & -7 & 5 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & -14 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -7 & \boxed{-9} \end{array}$$

Cociente: $x^6 - x^3 - 2x^2 - 7$. Resto: -9

f)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ -3 & & 6 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ \hline & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente: $-2x^4 + x - 3$. Resto: 0

012 Calcula el valor de m para que las divisiones sean exactas.

a) $(x^4 + m) : (x - 1)$

b) $(2x^5 + x^3 + m) : (x + 2)$

c) $(6x^3 + x^2 + 4x + m) : (x + 1)$

d) $(2x^7 - 4x^6 - 2x^3 + x + m) : (x - 4)$

Una vez que obtengas el valor de m, escribe el dividendo como producto de dos factores.

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & m \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{m+1} \end{array}$$

$m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$

Descomposición: $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & m \\ -2 & & -4 & 8 & -18 & 36 & -72 \\ \hline & 2 & -4 & 9 & -18 & 36 & \boxed{m-72} \end{array}$$

$m - 72 = 0 \rightarrow m = 72$

Descomposición: $(x + 2)(2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 18x + 36)$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 1 & 4 & m \\ -1 & & -6 & 5 & -9 \\ \hline & 6 & -5 & 9 & \boxed{m-9} \end{array}$$

$m - 9 = 0 \rightarrow m = 9$

Descomposición: $(x + 1)(6x^2 - 5x + 9)$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 2 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & m \\ 4 & & 8 & 16 & 64 & 256 & 1.016 & 4.064 & 16.260 \\ \hline & 2 & 4 & 16 & 64 & 254 & 1.016 & 4.065 & \boxed{m+16.260} \end{array}$$

$m + 16.260 = 0 \rightarrow m = -16.260$,

Descomposición: $(x - 4)(2x^6 + 4x^5 + 16x^4 + 64x^3 + 254x^2 + 1.016x + 4.065)$

013 Calcula, mediante el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $P(x)$ para los valores de x indicados en cada apartado.

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$$

a) $x = 1$ c) $x = -1$ e) $x = 3$
b) $x = 5$ d) $x = 7$ f) $x = -5$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 1 & & 1 & -6 & -5 \\ \hline & 1 & -6 & -5 & \boxed{-12} \end{array} \rightarrow P(1) = -12$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 5 & & 5 & -10 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & \boxed{-52} \end{array} \rightarrow P(5) = -52$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ -1 & & -1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & -8 & 9 & \boxed{-16} \end{array} \rightarrow P(-1) = -16$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 7 & & 7 & 0 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow P(7) = 0$$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ 3 & & 3 & -12 & -33 \\ \hline & 1 & -4 & -11 & \boxed{-40} \end{array} \rightarrow P(3) = -40$$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 1 & -7 \\ -5 & & -5 & 60 & -305 \\ \hline & 1 & -12 & 61 & \boxed{-312} \end{array} \rightarrow P(-5) = -312$$

014 Dado $P(x) = x^4 - 3x + 2$, halla, utilizando la definición de valor numérico y mediante el teorema del resto, su valor para:

a) $x = 2$ b) $x = -1$

a) $P(x) = x^4 - 3x + 2 \rightarrow P(2) = 12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & \boxed{12} \end{array} \rightarrow P(2) = 12$$

b) $P(x) = x^4 - 3x + 2 \rightarrow P(-1) = 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -4 & \boxed{6} \end{array} \rightarrow P(2) = 12$$

015 Determina cuánto vale a, sabiendo que el valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + a$, para $x = 2$, es nulo: $P(2) = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{a-6} \end{array} \rightarrow a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

016 Calcula estos números combinatorios.

a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{7}{5}$ c) $\binom{12}{3}$ d) $\binom{8}{7}$

a) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

b) $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

c) $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

d) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{7! \cdot 1!} = 8$

017 Desarrolla las siguientes potencias, utilizando el binomio de Newton.

a) $(2x - 5)^3$ b) $(x^3 + 2x)^5$

a) $(2x - 5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

b) $(x^3 + 2x)^5 = x^{15} + 10x^{13} + 40x^{11} + 80x^9 + 80x^7 + 32x^5$

018 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Por tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

019 Calcula las raíces enteras de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 1$

b) $Q(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$

a)

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

La raíz entera del polinomio es 1.

b)

	1	−9	−1	105
7		7	−14	−105
	1	−2	−15	0
5		5	15	
	1	3	0	

Las raíces enteras son {−3, 5, 7}.

020 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = 2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)(x - 4)(3x - 2)$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(x + 3)(x + 4)(2x + 1)$

021 Encuentra las raíces enteras de los polinomios.

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9$

c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 12 & 4 \\ -2 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & -2 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

La única raíz entera es -2.

$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$ Esta raíz no es entera.

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -8 & 0 & -9 \\ -3 & & -3 & 9 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Las raíces enteras son $\{-3, 3\}$.

c) Sacamos factor común: $2x^2(x^3 + 5x^2 + 14x + 16)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 14 & 16 \\ -2 & & -2 & -6 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

Las raíces enteras son $\{-2, 0\}$.

022 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)}$

b) $\dfrac{(x^2 - 9)(y^2 - 16)}{xy(2x - 6)(y + 4)^2}$

a) $\dfrac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} = \dfrac{x + 1}{x}$

b) $\dfrac{(x + 3)(x - 3)(y + 4)(y - 4)}{xy2(x - 3)(y + 4)^2} = \dfrac{(x + 3)(y - 4)}{2xy(y + 4)}$

023 Reduce a común denominador.

a) $\dfrac{x - 1}{xy}$ y $\dfrac{x + 2}{y - 1}$

b) $\dfrac{x}{(x - 1)^2}$, $\dfrac{-3}{x}$ y $\dfrac{-x - 1}{4}$

a) $\dfrac{(x - 1)(y - 1)}{xy(y - 1)}$ y $\dfrac{xy(x + 2)}{xy(y - 1)}$

b) $\dfrac{4x^2}{4x(x - 1)^2}$, $\dfrac{-12(x - 1)^2}{4x(x - 1)^2}$ y $\dfrac{-x(x - 1)^2(x + 1)}{4x(x - 1)^2}$

024 Resuelve las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{x^2}{y}+\frac{7(x-1)}{xy}$

b) $-\frac{3}{x^2y}+\frac{x}{y^2}$

c) $1+\frac{y-2}{y}$

d) $-3-\frac{(x-2)^2}{x}$

e) $(x+1)+\frac{x^2-3x+1}{x-1}$

f) $3x-\frac{3x^2-2}{x}+\frac{x-1}{2x^2}$

a) $\frac{x^3}{xy}+\frac{7x-7}{xy}=\frac{x^3+7x-7}{xy}$

b) $\frac{-3y}{x^2y^2}+\frac{x^3}{x^2y^2}=\frac{x^3-3y}{x^2y^2}$

c) $\frac{y}{y}+\frac{y-2}{y}=\frac{2(y-1)}{y}$

d) $\frac{-3x}{x}-\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{x^2+x-4}{x}$

e) $\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-1}=\frac{2x^2-3x}{x-1}=\frac{x(2x-3)}{x-1}$

f) $\frac{6x^3}{2x^2}-\frac{6x^3-4x}{2x^2}+\frac{x+1}{2x^2}=\frac{5x+1}{2x^2}$

025 Resuelve las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{4x^2}{y}\cdot\frac{y-1}{xy}$

b) $\frac{xy}{(x-1)^2}:\frac{3y}{x-1}$

c) $\left[(2+4x)\cdot\frac{x+1}{6x+3}\right]:(4x+4)$

a) $\frac{4x^2(y-1)}{xy^2}=\frac{4x(y-1)}{y^2}$

b) $\frac{xy(x-1)}{3y(x-1)^2}=\frac{x}{3(x-1)}$

c) $\frac{2(2x+1)(x+1)}{12(2x+1)(x+1)}=\frac{1}{6}$

026 Sean los polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$, $Q(x) = -x^3 + 5x + 1$ y $R(x) = -2x^2 - x + 2$.

Determina los siguientes valores numéricos.

a) $P(2)$
b) $Q(-1)$
c) $R\left(\frac{1}{2}\right)$
d) $P\left(\sqrt{2}\right)$
e) $R(-1) + Q(2)$
f) $Q\left(-\frac{2}{3}\right)$

a) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3 \rightarrow P(2) = -11$

b) $Q(x) = -x^3 + 5x + 1 \rightarrow Q(-1) = -3$

c) $R(x) = -2x^2 - x + 2 \rightarrow R\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

d) $P\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 13$

e) $R(-1) + Q(2) = 1 + 3 = 4$

f) $Q\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{55}{27}$

027 Encuentra el valor de a y b de modo que, para $P(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + 1$, se cumple que $P(-1) = -29$ y $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} P(-1) = -29 \rightarrow 8(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = -29 \rightarrow a - b = -22 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \rightarrow 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 4 \rightarrow a + 2b = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -\frac{32}{3} \\ b = \frac{34}{3} \end{array}$$

028 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3x + 5)(x - 2)$
b) $(4x - 1)(4x + 1)$
c) $(2x - 3)^2$
d) $(-3a + 6)^2$
e) $(2p^2 - 3q)^2$
f) $(-3x^2 - 1)^2$
g) $(5a^3b - 2ab^2)(5a^3b + 2ab^2)$

a) $(3x + 5)(x - 2) = 3x^2 - x - 10$

b) $(4x - 1)(4x + 1) = 16x^2 - 1$

c) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

d) $(-3a + 6)^2 = 9a^2 - 36x + 36$

e) $(2p^2 - 3q)^2 = 4p^4 - 12pq + 9q^2$

f) $(-3x^2 - 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$

g) $(5a^3b - 2ab^2)(5a^3b + 2ab^2) = 25a^6b^2 - 4a^2b^4$

029 Efectúa y compara los resultados de estas operaciones.

a) $5(x^2 - x + 1) - 2(x^2 + 3)$
b) $5(x^2 - x) + 1 - 2x^2 + 3$
c) $5(x^2 - x) + 1 - (2x^2 + 3)$
d) $5x^2 - (x + 1)(-2x^2 + 3)$
e) $(5x^2 - x + 1)(-2x^2 + 3)$

a) $5(x^2 - x + 1) - 2(x^2 + 3) = 3x^2 - 5x - 1$
b) $5(x^2 - x) + 1 - 2x^2 + 3 = 3x^2 - 5x + 4$
c) $5(x^2 - x) + 1 - (2x^2 + 3) = 3x^2 - 5x - 5$
d) $5x^2 - (x + 1)(-2x^2 + 3) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 3$
e) $(5x^2 - x + 1)(-2x^2 + 3) = -10x^4 + 2x^3 + 13x^2 - 3x + 3$

Los resultados son diferentes según el orden de las operaciones determinado por los paréntesis.

030 Efectúa y simplifica lo máximo posible.

a) $(3x^2 - 5)(-x + 3) - x^2 + 3x$
b) $(-x + y)^2 + (x - y)^2$
c) $3a^2 - 5a(a^2 - 2a)$
d) $(3a^2 - 5a)(a^2 - 2a)$

a) $(3x^2 - 5)(-x + 3) - x^2 + 3x = -3x^3 + 8x^2 + 8x - 15$
b) $(-x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 - 4xy + 2y^2$
c) $3a^2 - 5a(a^2 - 2a) = -5a^3 + 13a^2$
d) $(3a^2 - 5a)(a^2 - 2a) = 3a^4 - 11a^3 + 10a^2$

031 Realiza las operaciones, siendo:

$$P(x) = x^2 - 3x + 5 \qquad Q(x) = 2x^2 + 5 \qquad R(x) = 4x - 3$$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$
b) $P(x) - Q(x) \cdot R(x)$
c) $(P(x) - Q(x)) \cdot R(x)$
d) $3Q(x) - (x + 1) \cdot R(x)$
e) $-P(x) + 2Q(x)$
f) $P(x) - R(x)^2$

a) $P(x) + Q(x) - R(x) = 3x^2 - 7x + 7$
b) $P(x) - Q(x) \cdot R(x) = -8x^3 + 7x^2 - 23x + 20$
c) $(P(x) - Q(x)) \cdot R(x) = -4x^3 - 9x^2 + 9x$
d) $3Q(x) - (x + 1) \cdot R(x) = 6x^2 + 15 - (x + 1)(4x - 3) = 2x^2 - x + 12$
e) $-P(x) + 2Q(x) = 3x^2 + 3x + 5$
f) $P(x) - R(x)^2 = -15x^2 + 21x - 4$

032 Haz estas divisiones y comprueba su resultado.

a) $(x^3 - 2x^2 + 4x - 3) : (x^2 + 3x - 1)$

b) $(2x^3 - 5x + 2) : (x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^4 + 4x^3) : (x^2 - 2)$

d) $(x^3 + x^2 - 14x - 16) : (2x - 4)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +4x & -3 & x^2+3x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & +x & & x-5 \\ \cline{1-4}
 & -5x^2 & +5x & -3 & \\
 & 5x^2 & +15x & -5 & \\ \cline{2-4}
 & & 20x & -8 &
\end{array}$$

$$(x^2 + 3x - 1)(x - 5) + 20x - 8 = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & -5x & +2 & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & -2x & & 2x+4 \\ \cline{1-4}
 & 4x^2 & -7x & +2 & \\
 & -4x^2 & +8x & -4 & \\ \cline{2-4}
 & & x & -2 &
\end{array}$$

$$(x^2 - 2x + 1)(2x + 4) + x - 2 = 2x^3 - 5x + 2$$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +4x^3 & & & x^2-2 \\ \cline{5-5}
-x^4 & & +2x^2 & & x^2+4x+2 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & +2x^2 & & \\
 & -4x^3 & & +8x & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^2 & +8x & \\
 & & -2x^2 & & +4 \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & +4
\end{array}$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 4x + 2) + 8x + 4 = x^4 + 4x^3$$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -14x & -16 & 2x-4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-4 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & -14x & -16 & \\
 & -3x^2 & +6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -8x & -16 & \\
 & & 8x & -16 & \\ \cline{3-4}
 & & & -32 &
\end{array}$$

$$(2x - 4)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 4\right) - 32 = x^3 + x^2 - 14x - 16$$

033 Comprueba si esta igualdad es cierta.

$$(x^2 - 3x + 2)(2x - 1) + (3x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 4$$

$$(x^2 - 3x + 2)(2x - 1) + (3x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 + (3x - 2) =$$
$$= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 4$$

034 Encuentra $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$, tales que:

a) $P(x) + (x^2 - 3x + 5) = x^3 - 6x + 2$

b) $2x^3 - 6x + 3 - Q(x) = x^2 + 5x - 2$

c) $1 - \dfrac{R(x)}{(2x-1)^2} = x + 3$

d) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x + 4}{S(x)} = 2x + 1$

a) $P(x) = x^3 - 6x + 2 - (x^2 - 3x + 5) = x^3 - x^2 - 3x - 3$

b) $Q(x) = 2x^3 - 6x + 3 - (x^2 + 5x - 2) = 2x^3 - x^2 - 11x + 5$

c) $R(x) = (1 - (x + 3))(2x - 1)^2 = (-x - 2)(4x^2 - 4x + 1) = -4x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

d) $S(x) = (2x^3 - 5x^2 + 5x + 4) : (2x + 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & +4 & 2x+1 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -x^2 & & & x^2 - 3x + 4 = S(x) \\
\cline{1-4}
 & -6x^2 & +5x & +4 & \\
 & 6x^2 & +3x & & \\
\cline{2-4}
 & & 8x & +4 & \\
 & & -8x & -4 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

035 ¿Cuánto deben valer a y b para que se cumplan estas igualdades?

a) $(x - 3)(ax + b) = 2x^2 - 7x + 3$

b) $(ax + 3)(4x - b) = 8x^2 + 6x - 9$

c) $a(x - 2) + b(2x + 1) = 13x - 1$

d) $a(x^2 + 2x) + b(3x + 7) + x^2 = 5x^2 - x - 21$

a) $(x - 3)(ax + b) = 2x^2 - 7x + 3 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

b) $(ax + 3)(4x - b) = 8x^2 + 6x - 9 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

c) $a(x - 2) + b(2x + 1) = 13x - 1 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$

d) $a(x^2 + 2x) + b(3x + 7) + x^2 = 5x^2 - x - 21 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$

036 Realiza estas divisiones, empleando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto.

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(2x^3 + x^2 - 4) : (x + 3)$

c) $(2x^4 + 3x^2 + 5) : (x + 1)$

d) $(x^3 - 2x) : (x - 3)$

a)
$$\begin{array}{c|rrrr}
 & 1 & -3 & 5 & -1 \\
2 & & 2 & -2 & 6 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & \boxed{5}
\end{array} \rightarrow C(x) = x^2 - x + 3 \qquad R(x) = 5$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & & -6 & 15 & -45 \\ \hline & 2 & -5 & 15 & \boxed{-49} \end{array} \rightarrow C(x) = 2x^2 - 5x + 15 \qquad R(x) = -49$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & & -2 & 2 & -5 & 5 \\ \hline & 2 & -2 & 5 & -5 & \boxed{10} \end{array} \rightarrow C(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 5 \qquad R(x) = 10$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & & 3 & 9 & 21 \\ \hline & 1 & 3 & 7 & \boxed{21} \end{array} \rightarrow C(x) = x^2 + 3x + 7 \qquad R(x) = 21$$

037 Completa las siguientes divisiones.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & \boxed{-3} & \boxed{5} \\ 2 & & \boxed{2} & \boxed{8} & \boxed{10} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{2} & 5 & 15 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & \boxed{4} & \boxed{7} & -2 \\ \boxed{-1} & & -2 & \boxed{-2} & \boxed{-5} \\ \hline & \boxed{2} & 2 & 5 & \boxed{-7} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & \boxed{2} & -5 & \boxed{0} & \boxed{-4} & 1 \\ \boxed{3} & & \boxed{6} & \boxed{3} & 9 & \boxed{15} \\ \hline & 2 & \boxed{1} & 3 & \boxed{5} & 16 \end{array}$$

038 Determina el valor de *m*.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & m & -3 & 0 \\ -4 & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \boxed{-20} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & m & -3 & 0 \\ -4 & & -4 & 16 - 4m & 16m - 52 \\ \hline & 1 & m - 4 & 13 - 4m & \boxed{-20} \end{array} \rightarrow 16m - 52 = -20 \rightarrow m = 2$$

039 Utiliza la regla de Ruffini para decidir si el primer polinomio es divisible por el segundo.

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 3$ y $Q(x) = x - 3$

b) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 10x + 8$ y $Q(x) = x + 5$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 2 & -10 & 3 \\ 3 & & 3 & 0 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & -4 & \boxed{-9} \end{array} \rightarrow \text{No es divisible}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -10 & 8 \\ -5 & & -10 & 25 & -75 \\ \hline & 2 & -5 & 15 & \boxed{-67} \end{array} \rightarrow \text{No es divisible}$$

040 Comprueba, sin emplear la regla de Ruffini, si el primer polinomio es divisible por el segundo.

a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 14x + 15$ y $Q(x) = x - 3$

b) $P(y) = y^3 + 2y^2 - 6y - 9$ y $Q(y) = y + 2$

a) $P(3) = 54 - 27 - 42 + 15 = 0 \rightarrow$ Es divisible

b) $P(-2) = -8 + 8 + 12 - 9 = 3 \rightarrow$ No es divisible

041 Calcula el resto de las siguientes divisiones, sin hacerlas ni emplear la regla de Ruffini.

a) $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6$ y $Q(x) = x - 3$

b) $P(t) = 2t^3 + 4t - 8$ y $Q(t) = t + 5$

c) $P(x) = x^3 - 10x + 3$ y $Q(x) = x - 1$

d) $P(x) = 3x - x^3 - 10x^2$ y $Q(x) = x + 2$

a) $R = P(3) = 81 + 54 - 9 + 12 - 6 = 132$

b) $R = P(-5) = -250 - 20 - 8 = -278$

c) $R = P(1) = 1 - 10 + 3 = -6$

d) $R = P(-2) = -6 + 8 - 40 = -38$

042 ¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?

$R = P(4) = 67 \rightarrow 64 + 16a - 12 - a = 67 \rightarrow 15a = 15 \rightarrow a = 1$

043 Determina a y b de manera que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible por $x - 2$ y por $x + 3$.

Si es divisible por $x - 2 \rightarrow P(2) = 0 \rightarrow 8 + 4a + 2b - 6 = 0 \rightarrow 4a + 2b = -2$

Si es divisible por $x + 3 \rightarrow P(-3) = 0 \rightarrow -27 + 9a - 3b - 6 = 0 \rightarrow 9a - 3b = 33$

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -1 \\ 3a - b = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -5 \end{array}$$

044 Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible por $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma: $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow N(x) = 2x^2 - x + 2$$

045 Calcula x para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $\binom{8}{x} = \binom{8}{6}$ b) $\binom{x}{3} = \binom{x}{7}$ c) $\binom{a}{x} = \binom{a}{5}$

a) $x = 2$ b) $x = 10$ c) $x = a - 5$

046 Desarrolla y simplifica.

a) $(x + 3)^4$

b) $(x - y)^5$

c) $(3p + 2)^4$

d) $(-p + 2p^2)^4$

e) $\left(\frac{1}{3} - 2x\right)^5$

f) $(-3p - 5p^2)^3$

g) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^4$

h) $\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)^5$

i) $(x^2y - 3)^5$

j) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

a) $(x+3)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$
$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

b) $(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot (-y) + \binom{5}{2}x^3 \cdot (-y)^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot (-y)^3 + \binom{5}{4}x \cdot (-y)^4 +$
$+ \binom{5}{5}(-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

c) $(3p+2)^4 = \binom{4}{0}(3p)^4 + \binom{4}{1}(3p)^3 \cdot 2 + \binom{4}{2}(3p)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}3p \cdot 2^3 + \binom{4}{4}2^4 =$
$= 81p^4 + 216p^3 + 216x^2 + 96x + 16$

d) $(-p+2p^2)^4 = \binom{4}{0}(-p)^4 + \binom{4}{1}(-p)^3 \cdot 2p^2 + \binom{4}{2}(-p)^2 \cdot (2p^2)^2 + \binom{4}{3}(-p) \cdot (2p^2)^3 +$
$+ \binom{4}{4}(2p^2)^4 = p^4 - 8p^5 + 24p^6 - 32p^7 + 16p^8$

e) $\left(\frac{1}{3} - 2x\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-2x) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-2x)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-2x)^3 +$
$+ \binom{5}{4}\frac{1}{3} \cdot (-2x)^4 + \binom{5}{5}(-2x)^5 =$
$= \frac{1}{243} - \frac{10}{81}x + \frac{40}{27}x^2 - \frac{80}{9}x^3 + \frac{80}{3}x^4 - 32x^5$

f) $(-3p-5p^2)^3 = \binom{3}{0}(-3p)^3 + \binom{3}{1}(-3p)^2 \cdot (-5p^2) + \binom{3}{2}(-3p) \cdot (-5p^2)^2 + \binom{3}{3}(-5p^2)^3 =$
$= -27p^3 - 135p^4 - 225p^5 - 125p^6$

g) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\sqrt{3}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\right) + \binom{4}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 +$
$+ \binom{4}{3}\left(\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\sqrt{2}\right)^4 =$
$= 9 + 12\sqrt{6} + 36 + 8\sqrt{6} + 4 = 49 + 20\sqrt{6}$

h) $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\sqrt{5}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\sqrt{5}\right)^4 \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) + \binom{5}{2}\left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot \left(-2\sqrt{2}\right)^2 +$
$+ \binom{5}{3}\left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \left(-2\sqrt{2}\right)^3 + \binom{5}{4}\sqrt{5} \cdot \left(-2\sqrt{2}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(-2\sqrt{2}\right)^5 =$
$= 25\sqrt{5} - 250\sqrt{2} + 400\sqrt{5} - 800\sqrt{2} + 320\sqrt{5} - 128\sqrt{2}$

i) $(x^2y-3)^5 = \binom{5}{0}(x^2y)^5 + \binom{5}{1}(x^2y)^4 \cdot (-3) + \binom{5}{2}(x^2y)^3 \cdot (-3)^2 + \binom{5}{3}(x^2y)^2 \cdot (-3)^3 +$
$+ \binom{5}{4}x^2y \cdot (-3)^4 + \binom{5}{5}(-3)^5 =$
$= x^{10}y^5 - 15x^8y^4 + 90x^6y^3 - 270x^4y^2 + 405x^2y - 243$

j) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}(x^2)^6 + \binom{6}{1}(x^2)^5 \cdot \frac{1}{x} + \binom{6}{2}(x^2)^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 +$
$+ \binom{6}{4}(x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^6 =$
$= x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 20x^3 + 15 + 6 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}$

047 Determina en los desarrollos los términos que se indican.

a) Séptimo término de $(x+2y)^{10}$.

b) Décimo término de $(x^2-3)^{15}$.

c) Decimosexto término de $(2p+q^2)^{28}$.

d) Decimocuarto término de $(-a+2)^{21}$.

a) $\binom{10}{6}x^4\cdot(2y)^6 = 13.440x^4y^6$

b) $\binom{15}{9}(x^2)^6\cdot(-3)^9 = -98.513.415x^{12}$

c) $\binom{28}{15}(2p)^{13}\cdot(q^2)^{15} = 306.726.174.720p^{13}q^{30}$

d) $\binom{21}{13}(-a)^8\cdot 2^{13} = 1.666.990.080a^8$

048 Encuentra los términos indicados de los siguientes desarrollos.

a) El término central de $(3p^2-2q)^{12}$.

b) El término que contiene x^{12} en $(2x^2+1)^9$.

c) El término que contiene x^{11} en $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^{10}$.

a) $\binom{12}{6}(3p^2)^6\cdot(-2q)^6 = 43.110.144p^{12}q^6$

b) $\binom{9}{6}(2x^2)^6\cdot 1^3 = 5.376x^{12}$

c) $\binom{10}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3\cdot(-x^2)^7 = -120\cdot\frac{8}{x^3}\cdot x^{14} - 960x^{11}$

049 Calcula, empleando la fórmula del binomio de Newton, el valor de $5{,}1^3$ y $0{,}99^2$; teniendo en cuenta que:

$$5{,}1 = 5+0{,}1 \qquad 0{,}99 = 1-0{,}01$$

$$5{,}1^3 = (5+0{,}1)^3 = \binom{3}{0}5^3+\binom{3}{1}5^2\cdot 0{,}1+\binom{3}{2}5\cdot 0{,}1^2+\binom{3}{3}0{,}1^3 =$$
$$= 125+7{,}5+0{,}15+0{,}001 = 132{,}651$$

$$0{,}99^2 = (1-0{,}01)^2 = \binom{2}{0}1^2+\binom{2}{1}1\cdot(-0{,}01)+\binom{2}{2}(-0{,}01)^2 =$$
$$= 1-0{,}02+0{,}0001 = 0{,}9801$$

050 Estas expresiones se obtienen al desarrollar algunas potencias. Hállalas.

a) $4x^2 + 20x + 25$

b) $4a^2 - 12a + 9$

c) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

d) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16$

a) $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

b) $4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2$

c) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = (3x - 2)^3$

d) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16 = (3p + 2)^4$

051 El séptimo y el octavo términos del desarrollo de una potencia son $1.792x^2y^{12}$ y $1.024xy^{14}$, respectivamente. Calcula la potencia.

Al ser dos monomios consecutivos y positivos, la potencia corresponde a un binomio con dos términos positivos.

Como las potencias de x en los monomios conocidos corresponden al antepenúltimo y al penúltimo términos del desarrollo del binomio de Newton, y se trata de los términos séptimo y octavo, entonces la potencia correspondiente es 8.

$$\binom{8}{6} = 28 \rightarrow 1.792x^2y^{12} = 28 \cdot 64x^2y^{12} = \binom{8}{6}x^2 \cdot (2y^2)^6$$

$$\binom{8}{7} = 8 \rightarrow 1.024xy^{14} = 8 \cdot 128xy^{14} = \binom{8}{7}x \cdot (2y^2)^7$$

La potencia es $(x + 2y^2)^8$.

052 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

d) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

e) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$

f) $x^4 - 8x^2 - 9$

g) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = 2(x - 3)(x - 2)(x + 1)$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x - 4)(x + 2)(3x - 2)$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(x + 3)(x + 4)(2x + 1)$

d) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x - 3)^2(x + 1)$

e) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2 = (x + 2)^2(2x + 1)$

f) $x^4 - 8x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$

g) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2 = 2x^2(x + 2)(x^2 + 3x + 8)$

053 Determina las raíces de los siguientes polinomios.

a) $(x-3)(x+5)(x-2)$
b) $x(x-2)^2(2x+1)$
c) $(2x-1)(3x+2)(x+3)^2$
d) x^3-3x^2-6x+8
e) $x^3+8x^2+17x+10$
f) $3x^3+7x^2-22x-8$
g) $2x^4-11x^3+21x^2-16x+4$
h) $x^4-4x^3-12x^2+32x+64$

a) $(x-3)(x+5)(x-2) \rightarrow \{3, -5, 2\}$

b) $x(x-2)^2(2x+1) \rightarrow \left\{0, 2, -\frac{1}{2}\right\}$

c) $(2x-1)(3x+2)(x+3)^2 \rightarrow \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -3\right\}$

d) $x^3-3x^2-6x+8=(x-4)(x-1)(x+2) \rightarrow \{4, 1, -2\}$

e) $x^3+8x^2+17x+10=(x+1)(x+2)(x+5) \rightarrow \{-1, -2, -5\}$

f) $3x^3+7x^2-22x-8=(x-2)(x+4)(3x+1) \rightarrow \left\{2, -4, -\frac{1}{3}\right\}$

g) $2x^4-11x^3+21x^2-16x+4=(x-2)^2(x-1)(2x-1) \rightarrow \left\{2, 1, \frac{1}{2}\right\}$

h) $x^4-4x^3-12x^2+32x+64=(x-4)^2(x+2)^2 \rightarrow \{4, -2\}$

054 De un polinomio de segundo grado, $P(x)$, se sabe que $P(1)=-6$, que $P(0)=-3$ y que una de sus raíces es 3. Determina ese polinomio.

Por ser de segundo grado, el polinomio es de la forma: $P(x)=ax^2+bx+c$

Si $P(1)=-6 \rightarrow a+b+c=-6$

Como $P(0)=-3 \rightarrow c=-3$

Si 3 es una raíz del polinomio: $P(3)=0 \rightarrow 9a+3b+c=0$

Entonces, tenemos que: $\left.\begin{array}{r} a+b=-3 \\ 9a+3b=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=2 \\ b=-5 \end{array}$

Así, el polinomio es: $P(x)=2x^2-5x-3$

055 Obtén el valor de m para que el polinomio $P(x)=mx^3-6x^2-4x+8$ tenga 2 como raíz.

Si 2 es una raíz del polinomio:

$P(2)=0 \rightarrow 8m-24-8+8=0 \rightarrow 8m=24 \rightarrow m=3$

056 Halla el valor de n para que el polinomio $P(x)=2x^3+2x^2+nx+3$ tenga -3 como raíz.

Si -3 es una raíz del polinomio:

$P(-3)=0 \rightarrow -54+18-3n+3=0 \rightarrow -3n=33 \rightarrow n=-11$

057 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 2, 3 y 5, y otro polinomio con el mismo grado que tenga como raíces −2, −1 y 4.

$$P(x) = (x-2)(x-3)(x-5) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$$

$$Q(x) = (x+2)(x+1)(x-4) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

058 Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2, y tal que $P(3) = 30$.

$$P(x) = a(x-1)(x+2) = a(x^2 + x - 2)$$

Si $P(3) = 30 \rightarrow a \cdot 10 = 30 \rightarrow a = 3$

Luego, el polinomio es: $P(x) = 3x^2 + 3x - 6$

059 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, −1 y −1 y tal que $Q(2) = -18$.

$$Q(x) = a(x-3)(x+1)^2 = a(x^3 - x^2 - 5x - 3)$$

Si $Q(2) = -18 \rightarrow a \cdot (-9) = -18 \rightarrow a = 2$

Por tanto, el polinomio es: $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

060 Descompón estos polinomios y calcula su máximo común divisor.

a) $6x^2y$ $\quad 12x^3y^2z$ $\quad 18xy^3z^2$
b) $3x - 6$ $\quad 5x - 10$ $\quad 7x - 14$
c) $8x + 24$ $\quad 12x + 36$ $\quad 20x + 60$
d) $x^2 + x - 6$ $\quad 2x^2 - 3x - 2$
e) $3x^2 + 9x - 12$ $\quad 2x^2 + 4x - 16$
f) $4x^2 + 16x + 16$ $\quad 6x^2 + 42x + 60$
g) $24x^2 - 12x$ $\quad 90x^2 + 135x - 90$
h) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$
i) $x^3 + 5x^2 + 6x$ $\quad 3x^3 + 9x^2$
j) $3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ $\quad x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

a) m.c.d. $(6x^2y, 12x^3y^2z, 18xy^3z^2) = 6xy$

b) $$\left.\begin{array}{l} 3x - 6 = 3(x-2) \\ 5x - 10 = 5(x-2) \\ 7x - 14 = 7(x-2) \end{array}\right\} \text{m.c.d.}\ (3x-6, 5x-10, 7x-14) = x - 2$$

c) $$\left.\begin{array}{l} 8x + 24 = 8(x+3) \\ 12x + 36 = 12(x+3) \\ 20x + 60 = 20(x+3) \end{array}\right\} \text{m.c.d.}\ (8x+24, 12x+36, 20x+60) = x + 3$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \\ 2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1) \end{array}\right\} \text{m.c.d.}\ (x^2 + x - 6, 2x^2 - 3x - 2) = x - 2$$

e) $\left.\begin{array}{l} 3x^2+9x-12=3(x-1)(x+4) \\ 2x^2+4x-16=3(x-2)(x+4) \end{array}\right\}$ m.c.d. $(3x^2+9x-12,\ 2x^2+4x-16)=$
$= 3(x+4) = 3x+12$

f) $\left.\begin{array}{l} 4x^2+16x+16=4(x+2)^2 \\ 6x^2+42x+60=6(x+2)(x+5) \end{array}\right\}$ m.c.d. $(4x^2+16x+16,\ 6x^2+42x+60)=$
$= 2(x+2) = 2x+4$

g) $\left.\begin{array}{l} 24x^2-12x=12x(2x-1) \\ 90x^2+135x-90=45(x+2)(2x-1) \end{array}\right\}$ m.c.d. $(24x^2-12x,\ 90x^2+135x-90)=$
$= 3(2x-1) = 6x-3$

h) $\left.\begin{array}{l} x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2) \\ 2x^3-7x^2+2x+3=(x-3)(x-1)(2x+1) \end{array}\right\}$
m.c.d. $(x^3-2x^2-5x+6,\ 2x^3-7x^2+2x+3)=(x-3)(x-1)=x^2-4x+3$

i) $\left.\begin{array}{l} x^3+5x^2+6x=x(x+2)(x+3) \\ 3x^3+9x^2=3x^2(x+3) \end{array}\right\}$ m.c.d. $(x^3+5x^2+6x,\ 3x^3+9x^2)=$
$= x(x+3) = x^2+3x$

j) $\left.\begin{array}{l} 3x^3-7x^2+5x-1=(x-1)^2(3x-1) \\ x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3 \end{array}\right\}$ m.c.d. $(3x^3-7x^2+5x-1,\ x^3-3x^2+3x-1)=$
$= (x-1)^2 = x^2-2x+1$

061 Obtén el valor numérico de estas fracciones algebraicas en los valores que se indican.

a) $\dfrac{x^2+1}{3x+2}$ para $x=3$

b) $\dfrac{2x^2-8x+6}{x-1}$ para $x=3$

c) $\dfrac{2a-a^2}{6-a}$ para $a=-2$

d) $\dfrac{y^2-2xy}{x+2y}$ para $x=3$ e $y=-1$

a) $\dfrac{3^2+1}{3\cdot 3+2}=\dfrac{10}{11}$

b) $\dfrac{2\cdot 3^2-8\cdot 3+6}{3-1}=0$

c) $\dfrac{2(-2)-(-2)^2}{6-(-2)}=-1$

d) $\dfrac{(-1)^2-2\cdot 3(-1)}{3+2(-1)}=7$

062 Simplifica, si es posible, estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2yz}{z^2x}$

b) $\dfrac{12a^2b^3c}{8b^2c^3}$

c) $\dfrac{3a^2b^3d}{6b^5a^3}$

d) $\dfrac{3+2x}{3x}$

e) $\dfrac{3+2x}{2x^2}$

f) $\dfrac{3+6x}{3x}$

g) $\dfrac{3a^2-5a}{3a}$

h) $\dfrac{20-8a+4a^2}{12+8a}$

i) $\dfrac{6ab-3a^2}{4b-2a}$

j) $\dfrac{9x^3+27x^2}{18x^4+54x^3}$

a) $\dfrac{x^2yz}{z^2x} = \dfrac{xy}{z}$

b) $\dfrac{12a^2b^3c}{8b^2c^3} = \dfrac{3a^2b}{2c^2}$

c) $\dfrac{3a^2b^3d}{6b^5a^3} = \dfrac{d}{2ab^2}$

d) $\dfrac{3+2x}{3x}$

e) $\dfrac{3+2x}{2x^2}$

f) $\dfrac{3+6x}{3x} = \dfrac{1+2x}{x}$

g) $\dfrac{3a^2-5a}{3a} = \dfrac{3a-5}{3}$

h) $\dfrac{20-8a+4a^2}{12+8a} = \dfrac{5-2a+a^2}{3+2a}$

i) $\dfrac{6ab-3a^2}{4b-2a} = \dfrac{3a(2b-a)}{2(2b-a)} = \dfrac{3a}{2}$

j) $\dfrac{9x^3+27x^2}{18x^4+54x^3} = \dfrac{9x^2(x+3)}{18x^3(x+3)} = \dfrac{1}{2x}$

063 Realiza estas operaciones y simplifica.

a) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{5-3x}{4} - \dfrac{3x+1}{6}$

b) $\dfrac{3a-2}{5} - \dfrac{7-a}{2} - \dfrac{-3+12a}{10}$

c) $\dfrac{a^2-3}{8} - \dfrac{3a^2-11a}{12} - \dfrac{2a-1}{6}$

d) $\dfrac{3x^2}{2y} \cdot \dfrac{8xy}{9}$

e) $\dfrac{ab^2}{2c} : \dfrac{8a^3}{6b}$

f) $\dfrac{3+x}{2} \cdot \dfrac{4}{9-x}$

a) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{5-3x}{4} - \dfrac{3x+1}{6} = \dfrac{4x+8+15-9x-6x-2}{12} = \dfrac{-11x+21}{12}$

b) $\dfrac{3a-2}{5} - \dfrac{7-a}{2} - \dfrac{-3+12a}{10} = \dfrac{6a-4-35+5a+3-12a}{10} = \dfrac{-a-36}{10}$

c) $\dfrac{a^2-3}{8} - \dfrac{3a^2-11a}{12} - \dfrac{2a-1}{6} = \dfrac{3a^2-9-6a^2+22a-8a+4}{24} =$

$= \dfrac{-3a^2+14a-5}{24}$

d) $\dfrac{3x^2}{2y} \cdot \dfrac{8xy}{9} = \dfrac{4x^3}{3}$

e) $\dfrac{a^2b}{2c} : \dfrac{8a^3}{6b} = \dfrac{3b^2}{8ac}$

f) $\dfrac{3+x}{2} \cdot \dfrac{4}{9-x} = \dfrac{6+2x}{9-x}$

064 Efectúa estas operaciones y simplifica.

a) $\frac{2}{a} - \frac{5}{b} + \frac{3a+b}{ab}$

b) $\frac{1+2y}{x^2} - \frac{5y-x}{y} - \frac{3xy-2x^2}{xy}$

c) $\frac{a^2-3}{8a} - \frac{3a^3-11a}{12a^2} - \frac{2a-1}{6}$

d) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6}$

e) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3}$

f) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a}$

g) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$

a) $\frac{2}{a} - \frac{5}{b} + \frac{3a+b}{ab} = \frac{2b-5a+3a+b}{ab} = \frac{-2a+3b}{ab}$

b) $\frac{1+2y}{x^2} - \frac{5y-x}{y} - \frac{3xy-2x^2}{xy} = \frac{y+2y^2-5x^2y+x^3-3x^2y+2x^3}{x^2y} =$
$= \frac{3x^3-8x^2y+y+2y^2}{x^2y}$

c) $\frac{a^2-3}{8a} - \frac{3a^3-11a}{12a^2} - \frac{2a-1}{6} = \frac{3a^3-9a-6a^3+22a-8a^3+4a^2}{24a^2} =$
$= \frac{-11a^2+4a+13}{24a}$

d) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6} = \frac{18-3-4}{6(a+2)} = \frac{11}{6a+12}$

e) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3} = \frac{3p+9-2p^2-6p+p+p^2+2+2p}{(p+2)(p+3)} = \frac{-p^2+11}{p^2+5p+6}$

f) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a} = \frac{3-2}{2a-6} = \frac{1}{2a-6}$

g) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12} = \frac{3x^2-9x-x+3-x^2-3x-2x-6}{4(x+3)(x-3)} =$
$= \frac{2x^2-15x-3}{4x^2-36}$

065 Realiza estas sumas y restas, y simplifica el resultado.

a) $\frac{3}{3x^2+6x} + \frac{1}{x} + \frac{2-x}{6x+12}$

b) $\frac{x+1}{x^2+x-6} - \frac{2-3x}{x^2+3x}$

c) $\frac{2-3a}{a^2+4a+4} - \frac{1}{2a+4} - \frac{1+2a}{a^2-4}$

d) $\frac{4}{3x^2-3x-18} - \frac{3}{2x^2+2x-4}$

a) $\dfrac{3}{3x^2+6x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2-x}{6x+12}=\dfrac{6+6x+12+2x-x^2}{6x(x+2)}=\dfrac{-x^2+8x+18}{6x^2+12x}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2+x-6}-\dfrac{2-3x}{x^2+3x}=\dfrac{x^2+x-2x+4+3x^2-6x}{x(x+3)(x-2)}=\dfrac{4x^2-7x+4}{x^3+x^2-6x}$

c) $\dfrac{2-3a}{a^2+4a+4}-\dfrac{1}{2a+4}-\dfrac{1+2a}{a^2-4}=$

$=\dfrac{4a-6a^2-8+12a-a^2+4-2a-4a^2-4-8a}{2(a+2)^2(a-2)}=$

$=\dfrac{-11a^2+6a-8}{2a^3-4a^2+8a^2-16a+8a-16}$

d) $\dfrac{4}{3x^2-3x-18}-\dfrac{3}{2x^2+2x-4}=\dfrac{8x-8-9x+27}{6(x-3)(x+2)^2(x-1)}=$

$=\dfrac{-x+19}{6x^4-54x^2-24x+72}$

066 Calcula y simplifica el resultado.

a) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right):\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$

b) $\left(\dfrac{x}{2}-y\right)\left(\dfrac{y}{2}-x\right)$

c) $\left(\dfrac{1}{2-x}+1\right):\left(2-\dfrac{x}{x-2}\right)$

d) $3-3\left(\dfrac{a+1}{2}-1\right)+\left(\dfrac{3}{2}+a\right)\cdot 2$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x+6}{3x+6}-\dfrac{1-x}{2x-6}$

f) $\dfrac{6x-28}{x^2-x-6}:\left(\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right):\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=\dfrac{1-x}{x}:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{2-2x}{x^2+2x}$

b) $\left(\dfrac{x}{2}-y\right)\left(\dfrac{y}{2}-x\right)=\dfrac{x-2y}{2}\cdot\dfrac{y-2x}{2}=\dfrac{5xy-2x^2-2y^2}{4}$

c) $\left(\dfrac{1}{2-x}+1\right):\left(2-\dfrac{x}{x-2}\right)=\dfrac{3-x}{2-x}:\dfrac{x-4}{x-2}=\dfrac{(3-x)(x-2)}{(2-x)(x-4)}=\dfrac{3-x}{4-x}$

d) $3-3\left(\dfrac{a+1}{2}-1\right)+\left(\dfrac{3}{2}+a\right)\cdot 2=3-3\cdot\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{3+2a}{2}\cdot 2=$

$=3-\dfrac{3a-3}{2}+3+2a=$

$=\dfrac{6-3a+3+6+4a}{2}=\dfrac{a+15}{2}$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x+6}{3x+6}-\dfrac{1-x}{2x-6}=\dfrac{(x+2)\cdot 2(x+3)}{(x+3)(x-3)\cdot 3(x+2)}-\dfrac{1-x}{2(x-3)}=$

$=\dfrac{2}{3(x-3)}-\dfrac{1-x}{2(x-3)}=\dfrac{1+3x}{6x-18}$

f) $\dfrac{6x-28}{x^2-x-6}:\left(\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}\right)=\dfrac{6x-28}{x^2-x-6}:\dfrac{3x-14}{x^2-x-6}=\dfrac{6x-28}{3x-14}=2$

067 Demuestra esta igualdad.

$$\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$$

$$\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1+x-1}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$

068 Halla los valores de A y de B para que se cumpla la igualdad.

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-4}=\frac{x-16}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x+2)}{(x+2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A+2B}{x^2-2x-8}=\frac{x-16}{x^2-2x-8}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l}A+B=1\\-4A+2B=-16\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}A+B=1\\2A-B=8\end{array}\right\}\begin{array}{l}A=3\\B=-2\end{array}$$

069 La relación entre el dividendo (D), el divisor (d), el cociente (C) y el resto (R) en una división se puede expresar como:

$$\frac{D}{d}=C+\frac{R}{d}$$

Es decir, si al dividir x^2+3x+5 entre $x+2$ obtenemos como cociente $x+1$ y resto 3, podemos escribir:

$$\frac{x^2+3x+5}{x+2}=x+1+\frac{3}{x+2}$$

Expresa de esta manera las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2+3x}{x+4}$

b) $\dfrac{2x^2-x+3}{x-2}$

c) $\dfrac{x^3-2x^2+5x-1}{x^2-x+2}$

d) $\dfrac{2x^3+2}{x^2-x+1}$

a)
$$\begin{array}{rl|l} x^2+3x & & x+4 \\ \cline{3-3} -x^2-4x & & x \\ \cline{1-1} -x & & \end{array} \rightarrow \frac{x^2+3x}{x+4}=x-\frac{x}{x+4}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x+3 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x^2+4x & 2x+3 \\ \cline{1-1} 3x+3 & \\ -3x+6 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array} \rightarrow \frac{2x^2-x+3}{x-2}=2x+3+\frac{9}{x-2}$$

c)
$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x + 2 \\ \hline -x^3 + x^2 - 2x & x - 1 \\ \quad -x^2 + 3x - 1 & \\ \quad x^2 - x + 2 & \\ \quad\quad 2x + 1 & \end{array} \rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{x^2 - x + 2} = x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 - x + 2}$$

d)
$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \qquad\qquad + 2 & x^2 - x + 1 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 - 2x & 2x + 2 \\ \quad 2x^2 - 2x + 2 & \\ \quad -2x^2 + 2x - 2 & \\ \quad\quad 0 & \end{array} \rightarrow \frac{2x^3 + 2}{x^2 - x + 1} = 2x + 2$$

070 La igualdad $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 25$ es falsa, porque: $(3 \cdot 2 + 5)^2 \neq 9 \cdot 2^2 + 25$

Usa el mismo procedimiento para comprobar que las siguientes afirmaciones son falsas, y después escríbelas correctamente.

a) $(3 - 2p)^2 = 9 - 4p^2$

b) $(2x - 1)^2 = 2x^2 - 4x + 1$

c) $(5 - 3x)(5 + 3x) = 25 - 6x^2$

a) Respuesta abierta: $(3 - 2 \cdot 3)^2 \neq 9 - 4 \cdot 3^2$

$(3 - 2p)^2 = 9 - 12p + 4p^2$

b) Respuesta abierta: $(2 \cdot 2 - 1)^2 \neq 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1$

$(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

c) Respuesta abierta: $(5 - 3 \cdot 1)(5 + 3 \cdot 1)^2 \neq 25 - 6 \cdot 1^2$

$(5 - 3x)(5 + 3x) = 25 - 9x^2$.

071 ¿Cómo puedes factorizar el polinomio $8x^2 - 2x - 15$, sabiendo que es múltiplo de $4x + 5$?

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 - 2x - 15 & 4x + 5 \\ \hline -8x^2 - 10x & 2x - 3 \\ \quad -12x - 15 & \\ \quad 12x + 15 & \\ \quad\quad 0 & \end{array} \rightarrow 8x^2 - 2x - 15 = (4x + 5)(2x - 3)$$

072 ¿Cómo puedes factorizar el polinomio $8x^2 - 10x - 3$, sabiendo que una de sus raíces es $\frac{3}{2}$?

Si $\frac{3}{2}$ es una raíz, entonces $2x - 3$ es un factor del polinomio.

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 - 10x - 3 & 2x - 3 \\ \hline -8x^2 + 12x & 4x + 1 \\ \quad 2x - 3 & \\ \quad -2x + 3 & \\ \quad\quad 0 & \end{array} \rightarrow 8x^2 - 10x - 3 = (2x - 3)(4x + 1)$$

073 Divide por medio de la regla de Ruffini el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ entre:

a) $x - \frac{1}{2}$

b) $x - \sqrt{2}$

a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{17}{8} \end{array} \rightarrow C(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \qquad R(x) = \frac{17}{8}$$

b)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & & \sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & 5\sqrt{2}-4 \\ \hline & 1 & \sqrt{2}-2 & 5-2\sqrt{2} & 5\sqrt{2}-3 \end{array}$$
$$C(x) = x^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)x + 5 - 2\sqrt{2} \qquad R(x) = 5\sqrt{2} - 3$$

074 Determina un polinomio del que sabemos que:

a) Es de tercer grado.

b) Solo tiene dos términos.

c) Se anula para $x = 1$.

d) $P(2) = 28$

Al ser un polinomio de tercer grado es de la forma: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Si se anula para $x = 1$: $P(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$

Como $P(2) = 28 \rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 28$

Si solo tiene dos términos, hay tres posibilidades:

1) Si $b \neq 0$ y $c = d = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = 0 \\ 8a + 4b = 28 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 7 \\ b = -7 \end{array}\right\} \rightarrow P(x) = 7x^3 - 7x^2$

2) Si $c \neq 0$ y $b = d = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + c = 0 \\ 8a + 2c = 28 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \frac{14}{3} \\ c = -\frac{14}{3} \end{array}\right\} \rightarrow P(x) = \frac{14}{3}x^3 - \frac{14}{3}x$

3) Si $d \neq 0$ y $b = c = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + d = 0 \\ 8a + d = 28 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 4 \\ c = -4 \end{array}\right\} \rightarrow P(x) = 4x^3 - 4$

075 Escribe dos polinomios cuyo máximo común divisor sea ab^2c y cuyo mínimo común múltiplo sea $a^3b^2c^2d$.

Respuesta abierta.

$P(x) = a^3b^2c$

$Q(x) = ab^2c^2d$

076 Escribe dos polinomios cuyo máximo común divisor sea $2(x - 3)(x + 5)^3$ y cuyo mínimo común múltiplo sea $2 \cdot 3^2(x - 3)^3(x + 5)^3(x + 7)$.

Respuesta abierta.

$P(x) = 18(x - 3)(x + 5)^3(x + 7)$

$Q(x) = 2(x - 3)^3(x + 5)^3$

077 Calcula estas raíces, sabiendo que los dos polinomios son cuadrados perfectos.

a) $\sqrt{9x^2 - 12x + 4}$

b) $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1}$

a) $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{(3x-2)^2} = 3x - 2$

b) $\sqrt{x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1} = \sqrt{(x^2 - 3x - 1)^2} = x^2 - 3x - 1$

078 Comprueba con varios ejemplos que si m y n son dos números naturales consecutivos, entonces:

$m^2 + n^2 + m^2n^2$ es un cuadrado perfecto.

Encuentra una demostración general de esta propiedad.

Si $m = 1$ y $n = 2 \rightarrow m^2 + n^2 + m^2n^2 = 9 = 3^2$

Si $m = 2$ y $n = 3 \rightarrow m^2 + n^2 + m^2n^2 = 49 = 7^2$

Si $m = 3$ y $n = 4 \rightarrow m^2 + n^2 + m^2n^2 = 169 = 13^2$

En general:

$$n = m + 1 \rightarrow m^2 + (m+1)^2 + m^2(m+1)^2 = m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^4 + 2m^3 + m^2 =$$
$$= m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1 = (m^2 + m + 1)^2$$

079 El término general de la progresión aritmética: 5, 8, 11, 14, 17, 20, … es $a_n = 3n + 2$. Calcula la expresión del término general de estas progresiones.

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) −5, −3, −1, 1, 3, …

c) 8, 3, −2, −7, −12, …

d) −1, −4, −7, −10, …

a) $a_n = 4n - 3$

b) $a_n = 2n - 7$

c) $a_n = -5n + 13$

d) $a_n = -3n + 2$

080 Completa esta tabla y determina el polinomio que expresa el número de diagonales de un polígono convexo en relación con su número de lados.

N.º de lados	3	4	5	6	7
N.º de diagonales	0	2	5	9	14

Si x es el número de lados, entonces: $P(x) = \dfrac{x(x-3)}{2} = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x$

081 ●●●
El director de un supermercado ha observado que el número de clientes atendidos cada hora por un dependiente está relacionado con su experiencia. Ha estimado que ese número puede calcularse de forma aproximada con la función: $C(d) = \dfrac{40d}{d+3}$, donde d es el número de días que el dependiente lleva trabajando y C es el número de clientes atendidos en una hora.

a) ¿Cuántos clientes por hora atendería un dependiente que lleve trabajando dos días?

b) El director sabe que un dependiente empieza a ser rentable a la empresa cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede eso?

c) Investiga lo que sucede con el número de clientes atendidos por dependientes que tienen mucha experiencia. ¿Puedes constatar alguna característica especial?

a) $C(2) = \dfrac{40 \cdot 2}{2+3} = 16$ clientes

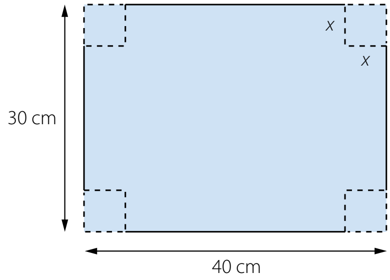
b) $\dfrac{40d}{d+3} = 32 \rightarrow 40d = 32d + 96 \rightarrow 8d = 96 \rightarrow d = 12$ días

c)

N.º de días	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
N.º de clientes	38,83	39,88	39,99	39,99	39,99

Si los dependientes tienen mucha experiencia, el número de clientes atendidos se aproxima a 40, sin llegar a superarlo.

082 ●●●
Una plancha de cartón mide 30 × 40 cm. En cada uno de sus vértices recortamos un cuadrado de x cm de lado. Doblando las solapas que quedan se forma una caja.



a) Expresa su volumen en función de x.

b) Calcula el volumen si x mide 2, 4, 6 y 8 cm.

c) Determina la medida de x para que el volumen de la caja sea máximo.

a) $V(x) = x(40 - 2x)(30 - 2x)$

b) $V(2) = 1.872\text{ cm}^3$ $V(4) = 2.816\text{ cm}^3$ $V(6) = 3.024\text{ cm}^3$ $V(8) = 2.688\text{ cm}^3$

c) $V(5) = 3.000\text{ cm}^3$ $V(7) = 2.912\text{ cm}^3$

Suponiendo que el lado tiene como longitud un número entero, el volumen es máximo cuando $x = 6$ cm.

083 **Determina A, B y C para que se cumpla que:**

$$\frac{7x^2+7}{x^3-x^2-x-2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Fíjate en la descomposición que hemos hecho de la fracción, para expresar estas fracciones algebraicas como la suma de otras fracciones más sencillas.

a) $\dfrac{x^2+x+9}{x^3+2x^2+9}$ **b)** $\dfrac{19-2x}{x^2+x-6}$

$$\frac{7x^2+7}{x^3-x^2-x-2} = \frac{(Ax+B)(x-2)+C(x^2+x+1)}{x^3-x^2-x-2}$$

$$\begin{aligned} 7x^2+7 &= (Ax+B)(x-2)+C(x^2+x+1) = \\ &= Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+Cx+C = \\ &= (A+C)x^2+(-2A+B+C)x+(-2B+C) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} A \quad\;\; + C = 7 \\ -2A + \;B + C = 0 \\ -2B + C = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} C = 7-A \\ -2A+B+7-A = 0 \\ -2B+7-A = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3A+B=0 \\ A-2B=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \\ C=5 \end{array}$$

a) $x^3+2x^2+9 = (x+3)(x^2-x+3)$

$$\frac{x^2+x+9}{x^3+2x^2+9} = \frac{Ax+B}{x^2-x+3} + \frac{C}{x+3}$$

$$\begin{aligned} x^2+x+9 &= (Ax+B)(x+3)+C(x^2-x+3) = \\ &= Ax^2+3Ax+Bx+3B+Cx^2-Cx+3C = \\ &= (A+C)x^2+(3A+B-C)x+(3B+3C) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} A \quad + \;\; C = 1 \\ 3A+B - \;\; C = 1 \\ 3B+3C = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} C = 1-A \\ 3A+B-1+A = 1 \\ 3B+3-3A = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4A+B=2 \\ -3A+3B=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=1 \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+9}{x^3+2x^2+9} = \frac{2}{x^2-x+3} + \frac{1}{x+3}$$

b) $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$

$$\frac{19-2x}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

$$19-2x = A(x-2)+B(x+3) = (A+B)x-2A+3B \rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=-2 \\ -2A+3B=19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=-5 \\ B=3 \end{array}$$

$$\frac{19-2x}{x^2+x-6} = \frac{-5}{x+3} + \frac{3}{x-2}$$

PARA FINALIZAR...

084 Demuestra la propiedad que cumplen los números combinatorios.

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

b) $\binom{55}{0}+\binom{55}{2}+\ldots+\binom{55}{54}=\binom{55}{1}+\binom{55}{3}+\ldots+\binom{55}{55}$

a) Si $n=1 \rightarrow \binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$

Si $n=2 \rightarrow \binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4=2^2$

Si $n=3 \rightarrow \binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=1+3+3+1=8=2^3$

Los números combinatorios verifican que:

$$\binom{n}{0}=1=\binom{n}{n} \qquad \binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

Así, para $n=4$:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\binom{4}{0}+\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}+\binom{4}{4}=$$

$$=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}+\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{4}=$$

$$=8+8=8\cdot 2=2^4$$

Análogamente, si para n la suma es 2^n, entonces para $n+1$ la suma es: $2^n\cdot 2=2^{n+1}$

b) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m} \rightarrow \binom{55}{0}=\binom{55}{55} \qquad \binom{55}{2}=\binom{55}{53}$

$\binom{55}{1}=\binom{55}{54} \qquad \binom{55}{3}=\binom{55}{52}$

$$\binom{55}{0}+\binom{55}{2}+\ldots+\binom{55}{54}=\binom{55}{1}+\binom{55}{3}+\ldots+\binom{55}{55}$$

085 Demuestra, utilizando el método de inducción, las siguientes igualdades.

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

a) Si $n=1 \rightarrow 1=\dfrac{1(1+1)}{2}$

Suponemos que se cumple la igualdad para $n=k$.

Entonces para $n = k + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

b) Si $n = 1 \rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

Suponemos que se cumple la igualdad para $n = k$.

Entonces para $n = k + 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + k^2 + 2k + 1$$
$$\rightarrow \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

c) Si $n = 1 \rightarrow 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$

Suponemos que se cumple la igualdad para $n = k$.

Entonces para $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$
$$= \frac{k^2(k^2 + 2k + 1)}{4} + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 4}{4} =$$
$$= \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2$$

086 **Dados los polinomios:**

$$P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 15x^2 - 32x + 12$$
$$Q(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 3x + 18$$

determina los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ de menor grado que cumplan que:

$$P(x) \cdot A(x) + Q(x) \cdot B(x) = 0$$

$$P(x) \cdot A(x) + Q(x) \cdot B(x) = 0 \rightarrow P(x) \cdot A(x) = -Q(x) \cdot B(x) \rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = -\frac{Q(x)}{P(x)}$$

$$P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 15x^2 - 32x + 12 = (x-2)(x+2)(x+3)(3x-1)$$

$$Q(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 3x + 18 = (x-2)(x+1)(x+3)(2x-3)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = -\frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{(x-2)(x+1)(x+3)(2x-3)}{(x-2)(x+2)(x+3)(3x-1)} = -\frac{(x+1)(2x-3)}{(x+2)(3x-1)}$$

Así, $A(x) = -2x^2 + x + 3$ y $B(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

087 Demuestra que, para cualquier número entero n, la siguiente expresión es múltiplo de 24.

$$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$$

$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n-1)n(n+1)(n+2)$

Como el polinomio es el producto de cuatro números enteros consecutivos, al menos uno de ellos ha de ser múltiplo de 3.

Siendo n un número entero, hay dos posibilidades:

1) Si n es impar, entonces $n-1$ y $n+1$ son pares y, además, son pares consecutivos; por tanto, uno de ellos es múltiplo de 4. Así, $(n-1)(n+1)$ es múltiplo de 8, luego el polinomio es múltiplo de 24.
2) Si n es par; entonces $n+2$ también es par, y como en el caso anterior, uno de ellos es múltiplo de 4. Por tanto, $n(n+2)$ es múltiplo de 8 y el polinomio es múltiplo de 24.

088 Un polinomio $P(x)$ verifica que:

$$P(2) = 3$$

es divisible por $x+1$.

Al dividirlo entre $x-5$, el resto es 15.

Calcula el resto de la división $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$Q(x) = (x-2)(x+1)(x-5)$$

$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$, siendo grado $R(x) <$ grado $Q(x) = 3$

$R(x) = ax^2 + bx + c$

$P(2) = C(2) \cdot Q(2) + R(2) \rightarrow 3 = C(2) \cdot 0 + R(2) \rightarrow 3 = 4a + 2b + c$

$P(-1) = C(-1) \cdot Q(-1) + R(-1) \rightarrow 0 + C(-1) \cdot 0 + R(-1) \rightarrow 0 = a - b + c$

$P(5) = C(5) \cdot Q(5) + R(5) \rightarrow 15 = 25a + 5b + c$

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 2b + c = 3 \\ a - b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2} \qquad c = 0$$

Así, el resto es: $R(x) = \dfrac{1}{2}x(x+1)$

089 Completa la siguiente fila del triángulo de Tartaglia.

1................3.003   2.002   1.001.................1

$$\binom{n}{k-1} = 3.003 \rightarrow \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = 3.003 \rightarrow n! = 3.003(k-1)!(n-(k-1))!$$

$$\binom{n}{k} = 2.002 \rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2.002 \rightarrow n! = 2.002k!(n-k)!$$

$$\binom{n}{k+1} = 1.001 \rightarrow \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = 1.001 \rightarrow n! = 1.001(k+1)!(n-(k+1))!$$

Igualando cada par de expresiones:

$$\left.\begin{array}{l}2.002k!(n-k)! = 3.003(k-1)!(n-(k-1))!\\ 2.002k!(n-k)! = 1.001(k+1)!(n-(k+1))!\end{array}\right\} \begin{array}{l}2k = 3(n-k+1)\\ 2(n-k) = k+1\end{array}\left.\right\} \begin{array}{l}5k-3n=3\\ 2n-3k=1\end{array}\left.\right\} \begin{array}{l}n=14\\ k=9\end{array}$$

Entonces la fila del triángulo está compuesta por:

$$\binom{14}{0}=1 \quad \binom{14}{1}=14 \quad \binom{14}{2}=91 \quad \binom{14}{3}=364 \quad \binom{14}{4}=1.001$$

$$\binom{14}{5}=2.002 \quad \binom{14}{6}=3.003 \quad \binom{14}{7}=3.432 \quad \binom{14}{8}=3.003 \quad \binom{14}{9}=2.002$$

$$\binom{14}{10}=1.001 \quad \binom{14}{11}=364 \quad \binom{14}{12}=91 \quad \binom{14}{13}=14 \quad \binom{14}{14}=1$$

090 **Haz esta suma.**

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\rightarrow 1=A(n+1)+Bn=(A+B)n+A\rightarrow \left.\begin{array}{r}A+B=0\\ A=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}A=1\\ B=-1\end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{99}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{99}}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$