13 Distribución binomial

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Se lanzan dos dados y se considera la variable *X*:"suma de las puntuaciones obtenidas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad.

b) Representa el diagrama de barras correspondiente.

c) Halla la probabilidad de que *X* tome un valor mayor que 5 pero menor o igual que 7.

a) Los 36 resultados posibles equiprobables en el lanzamiento de dos dados se pueden recoger en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6·6

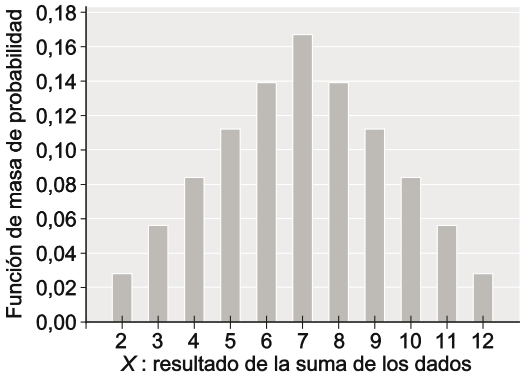
Se considera la variable *X*: "suma de las puntuaciones obtenidas", su función de masa de probabilidad se puede recoger en la tabla siguiente:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Donde, por ejemplo:

$$P(X=6)=P(51)+P(42)+P(33)+P(24)+P(15)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$$

b) El diagrama de barras correspondiente a la función de masa de probabilidad de *X* es:



c) La probabilidad pedida es $P(5<X\le 7)=P(X=6)+P(X=7)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{11}{36}$.

4. Sea *X* una variable aleatoria cuya función de masa de probabilidad viene dada en la tabla siguiente. Calcula el valor de *m*.

x_j	–2	0	4	6	8
p_i	0,2	0,3	m	0,1	0,15

El resultado es consecuencia de que la suma de todas ellas debe ser igual a la probabilidad del suceso seguro.

$$\sum_i p_i=1\Rightarrow 0,2+0,3+m+0,1+0,15=1\Rightarrow m=1-0,75\Rightarrow m=0,25$$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Una bolsa contiene 3 bolas: 1 bola blanca, 1 roja y 1 verde. De la bolsa se extraen al azar 2 bolas una a una con reemplazo. Sea la variable aleatoria *X*: “número de bolas verdes extraídas”.

a) Escribe su función de masa de probabilidad y dibuja el diagrama de barras correspondiente.

b) Calcula su esperanza, su varianza y su mediana.

c) Halla el coeficiente de variación.

a) Sea la variable aleatoria *X*: “número de bolas verdes extraídas”. Como se verá más adelante,su distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n=2\ ;\ p=\frac{1}{3}\right)$, pues la probabilidad de obtener bola verde en cada extracción es $p=\frac{1}{3}$.

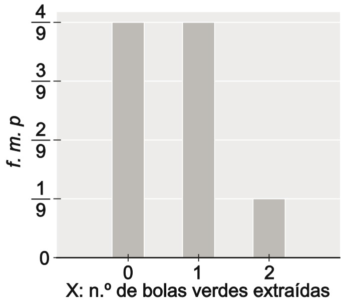
La variable aleatoria *X* puede tomar los valores 0, 1 y 2, con las siguientes probabilidades resumidas en la tabla.

$$P(X=0)=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=1\cdot 1\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=1)=\binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\cdot\frac{1}{9}\cdot 1=\frac{1}{9}$$

X	0	1	2
$P(X=x_j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$



b) Al tratarse de una variable aleatoria binomial, el valor esperado y su desviación típica son:

$$E[X]=np=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\quad \text{Var}(X)=npq=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\ \Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

También se puede hacer el cálculo directamente organizando las operaciones en una tabla:

$$\sigma^2=\text{Var}(X)=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

La mediana de *X* es *M*= 1 ya que

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\ge 0{,}5$$

$$P(X\ge 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}\ge 0{,}5$$

X	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	$\frac{4}{9}$	0	0
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
Suma		$\mu=E[X]=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$

c) El coeficiente de variación es: $CV(X)=\frac{\sigma}{|\mu|}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=1$

8. Un jugador lanza un dado equilibrado y si el resultado es 1 o 2, pierde lo que ha apostado, si sale 3 ó 4 pierde la mitad de lo apostado, si sale 5 no gana ni pierde nada y si sale 6 gana el triple de lo que haya apostado. Si apuesta *c* euros, ¿cuál es el valor esperado de su ganancia? ¿y la desviación típica?

Sea la variable aleatoria X: "ganancia del jugador".

Los resultados posibles y equiprobables en lanzamiento del dado son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Con probabilidad $P(1)+P(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde lo apostado (*c* euros).

Con probabilidad $P(3)+P(4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde la mitad ($\frac{c}{2}$ euros) de lo apostado.

Con probabilidad $P(5)=\frac{1}{6}$ ni pierde ni gana.

Con probabilidad $P(6)=\frac{1}{6}$ gana el triple (3*c* euros) de lo apostado.

La función de masa de probabilidad de X se puede resumir en la tabla adjunta.
De manera que el valor esperado de la ganancia y su desviación típica son:

X	$P(X=x)$
$-c$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{c}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$
$3c$	$\frac{1}{6}$
	1

$$E[X]=-c\cdot\frac{1}{3}-\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+3c\cdot\frac{1}{6}=0$$

$$\text{Var}(X)=\sigma^2=(-c)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{6}+(3c)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{23}{12}\cdot c^2 \Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{23}{12}}\,c$$

9. Ejercicio interactivo.

10. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}$.

$$\frac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[\frac{12!}{3!\cdot 9!}+\frac{12!}{3!\cdot 9!}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[2\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3!}}\right]\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{40}=\frac{2\cdot 12\cdot 11\cdot\cancel{10\cdot 4}}{\cancel{40}}=264$$

11. Halla el desarrollo de $(2x^2-5y)^4$.

$$(2x^2-5y)^4=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(2x^2)^i(-5y)^{4-i}=\binom{4}{0}(-5y)^4+\binom{4}{1}(2x^2)(-5y)^3+\binom{4}{2}(2x^2)^2(-5y)^2+\binom{4}{3}(2x^2)^3(-5y)+\binom{4}{4}(2x^2)^4=$$
$$=625y^4-1000x^2y^3+600x^4y^2-160x^6y+16x^8$$

12. Determina el valor de *m* en la expresión $\binom{2m}{3}=\binom{2m}{m+3}$.

Sabiendo que $2m\geq m+3\Rightarrow m\geq 3$ se puede encontrar una solución forzando a que

$$\begin{cases}\text{o bien } 2m-(m+3)=3\Rightarrow m=6\\ \text{o bien } m+3=3\Rightarrow m=0\end{cases}$$

La segunda posibilidad contradice la primera condición. De modo que la solución correcta es $m=6$.

13. Halla el término independiente de $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$.

En el desarrollo de $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$ los términos que aparecen tienen la forma $\binom{8}{i}(2x^3)^i \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^{8-i}$. Por tanto, el término independiente debe verificar que $3i = 8 - i \Rightarrow i = 2$ para poder simplificar las potencias de x y que el término no dependa de x.

Por tanto la respuesta es $\binom{8}{2}(2x^3)^2\left(\frac{-1}{x}\right)^{8-2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} \cdot 2^2 \cdot (-1)^6 = 112$.

14. Ejercicio resuelto.

15. En una agencia de viajes saben que el 65% de los circuitos son por Europa. Se pregunta a un cliente si va a realizar un tour por Europa. Se considera la variable aleatoria que da valor 1 si viaja por Europa y el valor 0 en caso contrario. Halla la esperanza y la desviación típica de la variable.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = 0,65$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,65^x \cdot 0,35^{1-x} & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0,65$ y su varianza es $\text{Var}(X) = 0,65 \cdot 0,35 = 0,2275$ y $\sigma \simeq 4770$.

16. Se ha detectado que 4 de cada 100 enfermos cardiacos padecen cefalea después de tomar un nuevo fármaco. Si se elige un enfermo al azar para ver si tiene cefalea o no. Halla la esperanza y la varianza de la variable que vale 1 si el paciente tiene dolor de cabeza y 0 si no lo tiene.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = \frac{4}{100} = 0,04$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,96^{1-x} \cdot 0,04^x & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0,04$ y su varianza es $\text{Var}(X) = 0,04 \cdot 0,96 = 0,0384$.

17. Ejercicio resuelto.

18. En un grupo de 7 amigos, considera la variable *Y*: "número de ellos que han nacido en verano". Si la probabilidad de que una persona nazca es la misma en cualquier estación del año, calcula:

a) Número esperado de amigos que han nacido en verano y su varianza.

b) Probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano.

c) Probabilidad de que como mucho 2 hayan nacido en verano.

Se supone que los 7 amigos se han seleccionado al azar y que la probabilidad de elegir cada uno de los 7 es la misma.

a) La variable *Y*: "número de amigos, de los 7, que ha nacido en verano", tiene una distribución binomial de parámetros $n = 7$ y $p = 0,25$, ya que 7 son los amigos y 0,25 la probabilidad de que cualquiera de ellos haya nacido en verano (una de las cuatro estaciones del año). Es decir, $Y \sim \text{Bin}(n = 7;\ p = 0,25)$.

Al tratarse de una variable aleatoria binomial, su esperanza y su varianza son:

$E[Y] = np = 7 \cdot 0,25 = 1,75$ $\qquad$ $\text{Var}(Y) = npq = 7 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,3125$

b) La probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano es $P(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^4 = 0,17303$.

c) La probabilidad de que como mucho dos de ellos hayan nacido en verano es:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{7}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^5 =$$
$$= 0,13348 + 0,31146 + 0,31146 = 0,7564$$

19. Un proveedor suministra lotes de materia prima de los que el 5% resulta defectuoso. De una gran partida se seleccionan al azar 6 lotes uno a uno con reemplazamiento, calcula:

a) Probabilidad de que al menos 1 sea defectuoso.

b) La varianza del número de lotes defectuosos, para una partida de 200 lotes.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de lotes defectuosos de los 6", cuya distribución de probabilidad es binomial con $n = 6$, número de los lotes suministrados, y $p = 0,05$, probabilidad de que, en cada elección, un lote sea defectuoso. Es decir $X \sim \text{Bin}\ (n = 6;\ p = 0,05)$.

a) La probabilidad de que por lo menos un lote sea defectuoso es:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^6 = 1 - 0,73509 = 0,26491$$

b) Si la partida consta de $n = 200$ lotes y se considera la variable Y: "número de lotes defectuosos de los 200", su distribución de probabilidad es $\text{Bin}(n = 200;\ p = 0,05)$, por lo que su esperanza y su varianza son:

$$E[Y] = 200 \cdot 0,05 = np = 200 \cdot 0,05 = 10 \quad \text{Var}(Y) = np(1-p) = 200 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 9,5$$

20. Ejercicio interactivo.

21. Ejercicio resuelto.

22. En 40 días, el médico de guardia de un centro de salud ha tenido que realizar las siguientes visitas a domicilio que se recogen en la tabla siguiente: en 6 días no realizó ninguna visita, en 17 días tuvo que hacer una visita, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	6	17	13	4

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas.

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

Se considera la variable *X*: "número de visitas realizadas". X toma los valores 0, 1, 2, y 3.

a) Para ajustar una variable aleatoria con distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n; p)$, a la variable estadística *X*, se observa que $n = 3$, y se calcula la media de la distribución de frecuencias, para estimar el parámetro p.

x_j	frecuencias observadas	$x_j f_j$
0	6	0
1	17	17
2	13	26
3	4	12
	40	55

De la tablase obtiene la media de la variable *X*: $\overline{X} = \frac{55}{40} = 1{,}375$

que se iguala a la esperanza de *Y*, para obtener p.

$$E[Y] = np = 3p = 1{,}375 \Rightarrow p = \frac{1{,}375}{3} = 0{,}458$$

De manera que a la variable estadística *X* se le ajusta una variable aleatoria *Y* con distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 3; p = 0{,}458)$.

b) Con la variable aleatoria *Y*se calculan las frecuencias ajustadas, obteniendo en primer lugar la probabilidad (ajustada) de cada uno de los valores:

$$P(Y = 0) = \binom{3}{0} 0{,}542^3 = 0{,}15922 \qquad P(Y = 1) = \binom{3}{1} 0{,}458^1 \cdot 0{,}542^2 = 0{,}40363$$

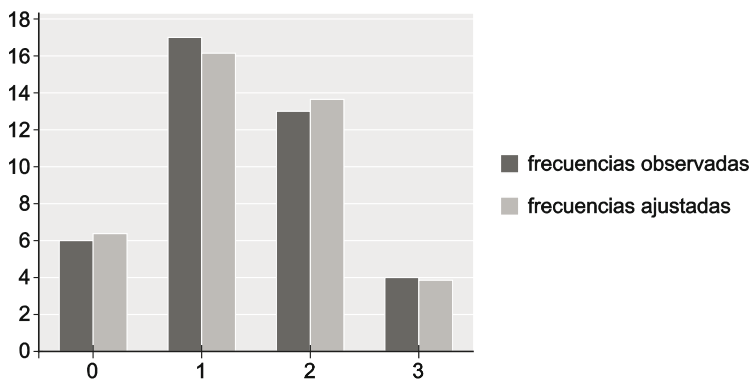
$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} 0{,}458^2 \cdot 0{,}542^1 = 0{,}34108 \qquad P(Y = 3) = \binom{3}{3} 0{,}458^3 = 0{,}09607$$

Estos valores se muestran en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 40).

Se puede apreciar, comparando las frecuencias observadas con las ajustadas, que el ajuste realizado es muy bueno.

x_j	frecuencias observadas	probabilidad ajustada	frecuencias ajustadas
0	6	0,15922	6,37
1	17	0,40363	16,15
2	13	0,34108	13,64
3	4	0,09607	3,84
	40	1	40

c) En el gráfico de diagramas de barras de las frecuencias ajustadas y observadas se puede ver también que el ajuste de la distribución estadística medianteuna distribución binomial es muy bueno.



23. En 300 familias con hijos menores de edad de un barrio de una gran ciudad se ha contabilizado el número de niñas (*X*). Los datos se recogen en la tabla.

x_j	0	1	2
f_j	75	180	45

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas. ¿Es razonable el ajuste?

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

La variable estadística *X:* "número de niñas", toma los valores 0, 1 y 2.

x_j	frecuencias observadas	x_jf_j
0	75	0
1	180	180
2	45	90
	300	270

a) Si se desea ajustar una distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n;p)$, a la distribución de frecuencias observadas, en este caso $n=2$. Para estimar el parámetro p se calcula la media de la variable estadística: $\overline{X}=\dfrac{270}{300}=0{,}9$

Igualando este valor a la esperanza de la variable binomial, permite estimar el valor de p

$$E[Y]=2p=0{,}9 \Rightarrow p=\frac{0{,}9}{2}=0{,}45$$

La distribución binomial que se ajusta a este conjunto de datos es $Y \sim \text{Bin}(n=2;\, p=0{,}45)$.

b) Se calculan, en primer lugar, las probabilidades estimadas para cada valor posible de la variable *Y*:

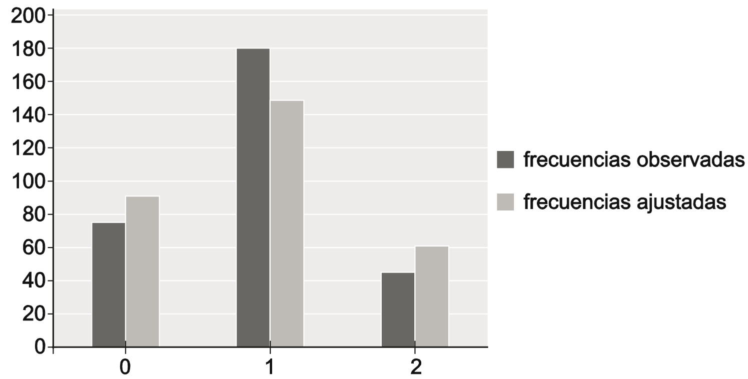
$$P(Y=0)=\binom{2}{0}0{,}55^2=0{,}3025\,;\; P(Y=1)=\binom{2}{1}10{,}45^1\cdot 0{,}55^1=0{,}4950\;\;;\; P(Y=2)=\binom{2}{2}0{,}45^2=0{,}2025$$

que se incluyen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 300):

xj	frecuencias observadas	probabilidad estimada	frecuencias ajustadas
0	75	0,3025	90,75
1	180	0,4950	148,5
2	45	0,2025	60,75
	300	1	300

Donde se puede observar que el ajuste realizado no es bueno, dada la diferencia entre las frecuencias ajustadas y las observadas.

c) La aproximación realizada mediante la distribución binomial a la distribución empírica del número de niñas, puede verse en el siguiente gráfico:



24 a 32. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

33. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada en la tabla siguiente:

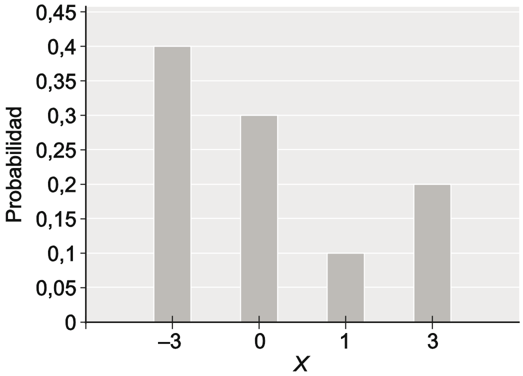
x_j	–3	0	1	3
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Representa gráficamente la distribución.

b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica.

c) Calcula $P(1 < X < 2{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) Se representa la distribución de probabilidad discreta mediante un diagrama de barras:



b) Para los cálculos se amplía la tabla con las columnas necesarias:

x_j	p_j	$x_j p_j$	$x_j^2 p_j$
–3	0,4	–1,2	3,6
0	0,3	0	0
1	0,1	0,1	0,1
3	0,2	0,6	1,8
	1	–0,5	5,5

$$E[X] = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j = -0{,}5$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 5{,}5 - (-0{,}5)^2 = 5{,}25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5{,}25} = 2{,}2913$$

c) A partir de la función de masa de probabilidad:
$P(1 < X < 2{,}5) = 0$
$P(X < 1) = P(x = -3) + P(X = 0) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

34. Sea *X* una variable que toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 0,2; *k*; 0,3; 0,15 y 0,1.

a) Determina k.

b) Halla $P(X > 1)$.

a) La suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es 1 luego:
$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2 + k + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = k + 0{,}75 = 1 \Rightarrow k = 0{,}25$

b) $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}55$

35. Sea *X* una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $P(X=k)=\dfrac{k}{x+1}$ para $x = 0, 1, 2, 3$.

a) Calcula el valor de la constante *k*.

b) Representa gráficamente la función de masa de probabilidad.

c) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

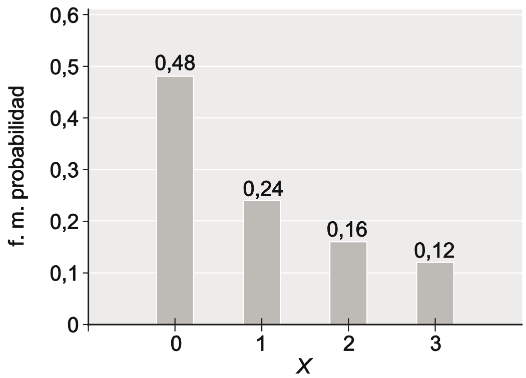
a) Como las probabilidades de los valores de la variable deben sumar 1:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Rightarrow k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1 \Rightarrow \frac{25\cdot k}{12}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25}=0{,}48$$

La función de masa de probabilidad de la variable *X* se muestra en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3
p_j	0,48	0,24	0,16	0,12

b) El diagrama de barras de la distribución de probabilidad de *X* es:

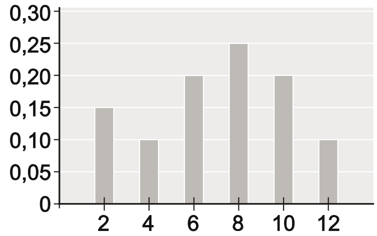


c) La esperanza y la varianza de la variable se calculan a partir de los resultados de la tabla siguiente:

x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
0	0,48	0	0
1	0,24	0,24	0,24
2	0,16	0,32	0,64
3	0,12	0,36	1,08
	1	0,92	1,96

$$E[X]=\sum_{j=1}^{4} p_j\,x_j=0{,}92 \quad \text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2-E[X]^2=1{,}96-(0{,}92)^2=1{,}1136$$

36. Sea una variable aleatoria *X* cuya función de masa de probabilidad viene dada por diagrama adjunto:



a) Comprueba que se trata de una función de masa de probabilidad.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) Calcula la probabilidad de que el valor de la variable sea menor o igual que 6. ¿Y mayor que 9?

a) La tabla siguiente recoge los valores de la variable aleatoria *X*, con sus respectivas probabilidades:

x_j	2	4	6	8	10	12
p_j	0,15	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1

Se trata de una distribución de probabilidad porque:

$p_j \geq 0$, para todo $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 y además $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0,15 + 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,2 + 0,1 = 1$

b) Para calcular la esperanza y la varianza se amplía la tabla de la distribución de *X* con las columnas necesarias:

x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
2	0,15	0,3	0,6
4	0,1	0,4	1,6
6	0,2	1,2	7,2
8	0,25	2	16
10	0,2	2	20
12	0,1	1,2	14,4
	1	7,1	59,8

De modo que la esperanza y la varianza de la variable aleatoria *X* son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j = 7,1$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 59,8 - 7,1^2 = 9,39$$

c) $P(X \leq 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,45$

$P(X > 9) = P(X = 10) + P(X = 12) = p_5 + p_6 = 0,3$

37. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* viene dada en la tabla siguiente:

x_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	*a*	0,2	*b*	0,33

Además, $P(X \leq 4) = 0,67$ **y** $P(X \geq 4) = 0,6$ **. Calcula:**

a) Los valores de *a* y *b* para completar la tabla.

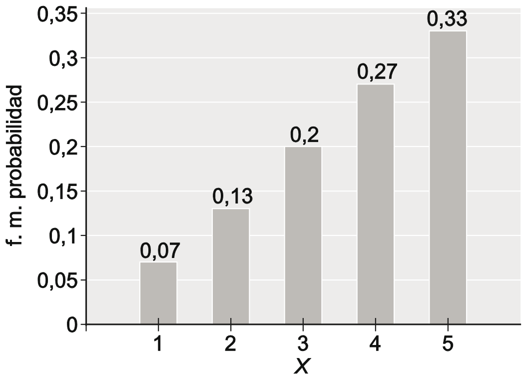
b) Dibuja la gráfica de la función de masa de probabilidad de *X*.

a) Teniendo en cuenta que $P(X \geq 4) = 0,6$, se tiene que: $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = b + 0,33 = 0,6 \Rightarrow b = 0,27$

Y como $P(X \leq 4) = 0,67$, resulta:

$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,07 + a + 0,2 + 0,27 = 0,67 \Rightarrow a = 0,13$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria *X* es:



38. La esperanza de una variable aleatoria *X* es 7. Se sabe que *X* puede tomar el valor 4 con probabilidad 0,2; el valor −1 con probabilidad *p* y el valor *a* con probabilidad 0,5.

a) Calcula los valores de *a* y *p*.

b) Calcula la desviación típica de *X*.

c) Halla el coeficiente de variación de *X*.

a) La tabla de la derecha recoge la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.Como las probabilidades deben sumar 1, se tiene que: $p+0,2+0,5=1 \Rightarrow p=0,3$

Y, dado que: $E[X]=7 \Rightarrow 0,3\cdot(-1)+0,2\cdot 4+0,5\cdot a=7 \Rightarrow a=13$

x_j	p_j
−1	p
4	0,2
a	0,5

b) Para el cálculo de la varianza y de la desviación típica, se añade a la tabla de la distribución la columna correspondientey por lo tanto:

$$\sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=88-7^2=39 \Rightarrow \sigma=\sqrt{39}=6,2450$$

x_j	p_j	$p_jx_j^2$
−1	0,3	0,3
4	0,2	3,2
13	0,5	84,5
	1	88

El coeficiente de variación es entonces: $CV(X)=\dfrac{\sigma}{|\mu|}=\dfrac{6,2450}{7}=0,89214$

39. De una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 verdes se extraen una a una sin reemplazamiento 2 bolas. Considera la variable aleatoria *X*: número de bolas verdes extraídas.

a) Halla su distribución de probabilidad y dibuja el diagrama de barras.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

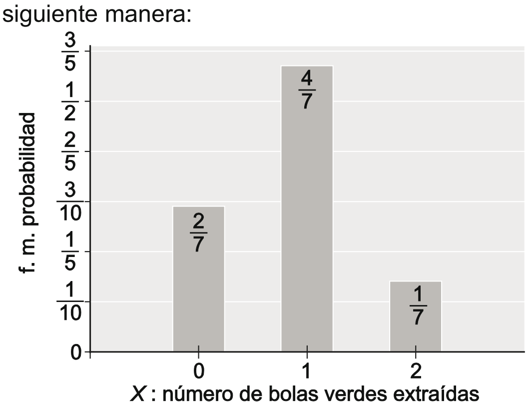
Como lo que interesa es el número de bolas verdes y no el orden en el que se han obtenido, se puede considerar que las bolas se extraen simultáneamente. De esta manera, el número de resultados posibles (igualmente probables) al extraer dos bolas de la bolsa es el número de combinaciones de orden 2 (las dos bolas que se extraen) de 7 elementos (las siete bolas de la bolsa): $C_{7,2}=\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$.

La probabilidad de la variable *X*: "número de bolas verdes extraídas" se obtiene por la regla de Laplace:

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{2}}{21}=\frac{2}{7} \qquad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{21}=\frac{4}{7} \qquad P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}}{21}=\frac{1}{7}$$

a) De modo que la distribución de probabilidad de *X* se puede escribir de la siguiente manera:

$X=x_j$	0	1	2
$P(X=x_j)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$



b) La esperanza y la varianza se calculan así:

$$E[X]=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j=\frac{6}{7} \qquad \sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

Números combinatorios. Binomio de Newton.

40. Calcula aplicando las propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{252}{250}$ **b)** $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}$ **c)** $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ **d)** $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}$

a) $\binom{252}{250}=\frac{252!}{250!\cdot 2!}=\frac{252\cdot 251}{2}=31626$

b) $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}=\binom{25+1}{4}=\binom{26}{4}=\frac{26!}{4!\cdot 22!}=\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=14\ 950$

c) Como $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4 \Rightarrow \binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=2^4-\binom{4}{4}=16-1=15$

d) $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n+2-(n-1)}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{3}=\binom{n+2+1}{3}=\binom{n+3}{3}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

41. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\binom{x}{2}=45$ **b)** $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3}$ **c)** $\binom{x}{6}=\binom{x}{9}$ **d)** $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3}$

a) $\binom{x}{2}=45 \Rightarrow \frac{x\cdot(x-1)}{2}=45 \Rightarrow x^2-x-90=0 \Rightarrow x=-9 \vee x=10$ (–9 no tiene sentido en términos combinatorios).

b) Como $\binom{n}{x}=\binom{n}{y} \Rightarrow x=n-y$ entonces $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3} \Rightarrow x-1=20-(2x+3) \Rightarrow x=6$

c) $\binom{x}{6}=\binom{x}{9} \Rightarrow 6=x-9 \Rightarrow x=15$

d) $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3} \Rightarrow x+2=8x-(6x+3) \Rightarrow x=5$

42. Realiza los desarrollos de los siguientes binomios.

a) $(2+x)^4$ **b)** $\left(2-\frac{x}{3}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)^5$ **d)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5$ **e)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6$ **f)** $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

a) $(2+x)^4 = \sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\cdot 2^j x^{4-j} = \binom{4}{0}\cdot 2^4 + \binom{4}{1}\cdot 2^3 x + \binom{4}{2}\cdot 2^2 x^2 + \binom{4}{3}\cdot 2x^3 + \binom{4}{4}\cdot x^4 = 16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\frac{x}{3}\right)^3 = \sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\cdot 2^j\left(\frac{-x}{3}\right)^{4-j} = \binom{3}{0}\cdot 2^3 + \binom{3}{1}\cdot 2^2\left(\frac{-x}{3}\right) + \binom{3}{2}\cdot 2\left(\frac{-x}{3}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(\frac{-x}{3}\right)^3 = 8-4x+\frac{2x^2}{3}-\frac{x^3}{27}$

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)^5 = \left(\frac{x^3+4}{2x^2}\right)^5 = \left(x^3+4\right)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot\left(x^3\right)^j(4)^{5-j} =$

$= \frac{1}{32x^{10}}\left[\binom{5}{0}\cdot x^{15} + \binom{5}{1}\cdot x^{12}\cdot 4 + \binom{5}{2}\cdot x^9\cdot 4^2 + \binom{5}{3}\cdot x^6\cdot 4^3 + \binom{5}{4}\cdot x^3\cdot 4^4 + \binom{5}{5}\cdot 4^5\right] =$

$= \frac{1}{32x^{10}}\left[x^{15}+20x^{12}+160x^9+640x^6+1280x^3+1024\right] = \frac{1}{32}x^5+\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{x}+\frac{20}{x^4}+\frac{40}{x^7}+\frac{32}{x^{10}}$

d) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5 = \left(1+2^{\frac{3}{2}}\right)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot 1^j 2^{\frac{3(5-j)}{2}} = \binom{5}{0}\cdot 2^{\frac{15}{2}} + \binom{5}{1}\cdot 2^6 + \binom{5}{2}\cdot 2^{\frac{9}{2}} + \binom{5}{3}\cdot 2^3 + \binom{5}{4}\cdot 2^{\frac{3}{2}} + \binom{5}{5} =$

$= 128\sqrt{2}+320+160\sqrt{2}+80+10\sqrt{2}+1 = 401+298\sqrt{2}$

e) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6 = \left(2-3^{\frac{3}{2}}\right)^6 = \sum_{j=0}^{6}\binom{6}{j}\cdot 2^j\left(-3^{\frac{3(6-j)}{2}}\right) = \binom{6}{0}\cdot(-3)^9 + \binom{6}{1}\cdot 2^1\cdot(-3)^{\frac{15}{2}} + \binom{6}{2}\cdot 2^2\cdot(-3)^6 + \binom{6}{3}\cdot 2^3\cdot(-3)^{\frac{9}{2}} +$

$+\binom{6}{4}\cdot 2^4\cdot(-3)^3 + \binom{6}{5}\cdot 2^5\cdot(-3)^{\frac{3}{2}} + \binom{6}{6}\cdot 2^6 = 2^6 - 576\sqrt{3} + 6480 - 12\,960\sqrt{34} + 43\,740 - 26\,224\sqrt{3} + 19\,683 =$

$= 69\,967 - 39\,760\sqrt{3}$

f) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 = 16\cdot 4 = 64$

Variables aleatorias binomiales.

43. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n*= 8 y *p*= 0,6. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de X **b)** $P(X<6)$, $P(X\geq 5)$ y $P(3\leq x<5)$

La distribución de la variable aleatoria es $X \sim \text{Bin}(n=8; p=0,6)$.

a) La esperanza y la varianza de X son respectivamente:

$E[X] = np = 8\cdot 0,6 = 4,8$ $\sigma^2 = \text{Var}(X) = npq = 8\cdot 0,6\cdot 0,4 = 1,92$

b) Las probabilidades se pueden obtener mediante el uso de la fórmula $P(X=x) = \binom{n}{x}0,6^x\,0,4^{n-x}$, o bien de la tabla de la distribución binomial, teniendo en cuenta que en la tabla se tienen las probabilidades de la variable $Y \sim \text{Bin}(n=8; p=0,4)$ y que $P(X=x) = P(Y=n-x)$.

$P(X<6) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) =$
$= P(Y=8)+P(Y=7)+P(Y=6)+P(Y=5)+P(Y=4)+P(Y=3) =$
$= 0,0007+0,0079+0,0413+0,1239+0,2322+0,2787 = 0,6847$

$P(X\geq 5) = P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8) = P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0) =$
$= 0,2787+0,2090+0,0896+0,0168 = 0,5941$

$P(3\leq X<5) = P(X=3)+P(X=4) = P(Y=5)+P(Y=4) = 0,1239+0,2322 = 0,3561$

44. Se lanzan 5 dados equilibrados y sea *Y*: “número de unos conseguidos en los 5 lanzamientos”. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Más de un uno.

b) Al menos cuatro unos.

c) Exactamente dos unos.

La variable aleatoria *Y* tiene distribución $\text{Bin}\left(n=5,\ p=\dfrac{1}{6}\right)$. Las probabilidades se obtienen a partir de la fórmula, ya que no se encuentran en las tablas.

a) $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-0{,}40188-0{,}40188=0{,}19624$

b) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0=0{,}00322+0{,}00013=0{,}00335$

c) $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=0{,}16075$

45. De una urna que contiene 4 bolas verdes y 6 rojas se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 6 bolas. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 3 bolas verdes. **b)** Más de 4 bolas verdes. **c)** Más de 2 pero menos de 5 bolas verdes.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes obtenidas en las 6 extracciones", cuya distribución es $\text{Bin}(n=6;\ p=0{,}4)$.

Las probabilidades que se piden se pueden obtener directamente de las tablas de la distribución binomial o utilizar la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial:

a) $P(X=3)=0{,}2765$

b) $P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)=0{,}0369+0{,}0041=0{,}0410$

c) $P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)=0{,}2765+0{,}1382=0{,}4147$

46. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,6. Si se lanza 10 veces la moneda, calcula:

a) La probabilidad de obtener al menos 8 caras.

b) La probabilidad de obtener menos de 5 caras.

c) El número medio de caras y la desviación típica de la variable número de caras en los 10 lanzamientos.

Sea la variable aleatoria *X*: “número de caras obtenidas en los diez lanzamientos”, cuya distribución es $\text{Bin}(n=10;\ p=0{,}6)$.

a) $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{8}0{,}6^8\,0{,}4^2+\binom{10}{9}0{,}6^9\,0{,}4^1+\binom{10}{10}0{,}6^{10}=$

$=0{,}1209+0{,}0403+0{,}0060=0{,}1672$

b) $P(X<5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$=\binom{10}{0}0{,}4^{10}+\binom{10}{1}0{,}6^1\cdot 0{,}4^9+\binom{10}{2}0{,}6^2\cdot 0{,}4^8+\binom{10}{3}0{,}6^3\cdot 0{,}4^7+\binom{10}{4}0{,}6^4\cdot 0{,}4^6=$

$=0{,}0001+0{,}0016+0{,}0106+0{,}0425+0{,}1115=0{,}1663$

c) $E[X]=np=10\cdot 0{,}6=6$ $\sigma^2=\text{Var}(X)=np(1-p)=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4$ $\sigma=\sqrt{\text{Var}(X)}=\sqrt{2{,}4}\simeq 1{,}55$

47. La probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado trucado es 0,4. Si se lanza el dado 10 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 5 seises.

b) Más de la mitad de las veces un seis.

c) Un número par de seises.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de seises obtenidos al lanzar 10 veces el dado". La distribución de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n = 10, p = 0,4)$.

a) $P(X=5)=\binom{10}{5}0,4^5 0,6^5 = 0,2007$

b) $P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

$=\binom{10}{6}0,4^6\cdot 0,6^4+\binom{10}{7}0,4^7\cdot 0,6^3+\binom{10}{8}0,4^8\cdot 0,6^2+\binom{10}{9}0,4^9\cdot 0,6^1+\binom{10}{10}0,4^{10}=$

$=0,1115+0,0425+0,0106+0,0016+0,0001=0,1663$

c) $P(X=\text{PAR})=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)=$

$=\binom{10}{2}0,4^2\cdot 0,6^8+\binom{10}{4}0,4^4\cdot 0,6^6+\binom{10}{6}0,4^6\cdot 0,6^8+\binom{10}{8}0,4^8\cdot 0,6^2+\binom{10}{10}0,4^{10}=$

$=0,1209+0,2508+0,1115+0,0106+0,0001=0,4939$

Ajuste de una distribución binomial.

48. En una población se han investigado las alergias a cuatro tipos de medicamentos. Para ello, se ha observado mediante pruebas la reacción de 500 personas a los cuatro medicamentos y los resultados se han recogido en la tabla siguiente: 141 no han presentado ningún tipo de alergia, 205 presentaron alergia a uno de los medicamentos, etc.

x_j	0	1	2	3	4
f_j	141	205	120	14	20

a) Ajusta una distribución binomial a los datos.

b) Representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas y comenta la precisión del ajuste.

a) La variable es X: "n.º de medicamentos a los que se presenta alergia". Esta variable, toma los valores: $0, 1, 2, 3$ y 4, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n = 4$ y se debe estimar el parámetro p.

x_j	f_j	x_jf_j
0	141	0
1	205	205
2	120	240
3	14	42
4	20	80
	500	567

La media de la distribución de frecuencias es $\overline{X} = \dfrac{567}{500} = 1{,}134$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 4p$, igualando resulta: $4p = 1{,}134 \Rightarrow p = 0{,}2835$

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es $X \sim \text{Bin}\ (n = 4;\ p = 0{,}2835)$.

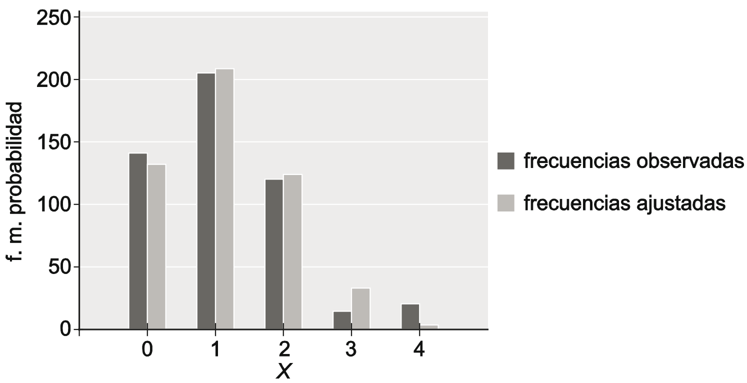
$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}2835^0 \cdot 0{,}7165^4 = 0{,}26355$ $\quad P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}2835^1 \cdot 0{,}7165^3 = 0{,}41712$

$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}2835^2 \cdot 0{,}7165^2 = 0{,}24757$ $\quad P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}2835^3 \cdot 0{,}7165^1 = 0{,}06530$

$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}2835^4 \cdot 0{,}7165^0 = 0{,}00646$

b) La distribución de frecuencias ajustadas frente a las observadas se muestra en la tabla y en el gráfico siguientes:

x_j	frecuencias Observadas f_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias Ajustadas
0	141	0,26355	131,78
1	205	0,41712	208,56
2	120	0,24757	123,78
3	14	0,06530	32,65
4	20	0,00646	3,23
	500	1	500



En el gráfico, puede observarse que el ajuste es razonablemente bueno en su conjunto, si bien las frecuencias ajustadas a los dos valores más altos, $x = 3$ y $x = 4$, quedan lejos de las frecuencias observadas.

Síntesis

49. La función de masa de probabilidad del número de vehículos que se venden en un concesionario de coches es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	0,04	0,04	m	0,12	0,3	0,25	0,1	0,05

a) Hallar el valor de m.

b) Dibuja el diagrama de barras de la función de masa de probabilidad.

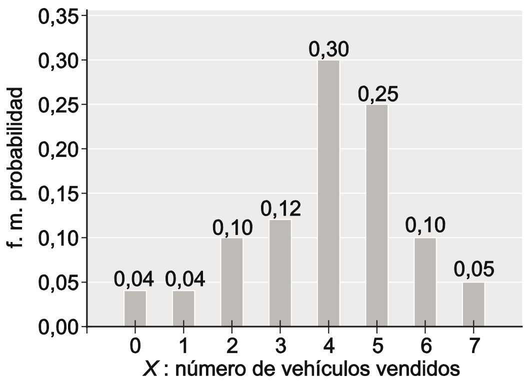
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el concesionario se vendan más de dos coches pero menos de seis?

d) Si se sabe que en una semana se han vendido más de 3 coches, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan vendido menos de 7?

a) Como la suma de las probabilidades debe ser la unidad:

$$\sum_{j=1}^{8} p_j = 1 \Rightarrow 0{,}04+0{,}04+m+0{,}12+0{,}3+0{,}25+0{,}1+0{,}05=1 \Rightarrow m=0{,}1$$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad es:



c) $P(2<X<6)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=0{,}12+0{,}3+0{,}25=0{,}67$

d) $P(3<X<7)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$
$=0{,}3+0{,}25+0{,}1=0{,}65$
$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=$
$=0{,}30+0{,}25+0{,}10+0{,}05=0{,}7$

Se tiene que: $P(X<7|X>3)=\dfrac{P(3<X<7)}{P(X>3)}=\dfrac{0{,}65}{0{,}7}=0{,}9286$.

50. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\binom{2x+1}{x-1}=\binom{2x+1}{2x-7}$ **b)** $\binom{x}{2}-x=\binom{x-2}{2}+3$

a) $\binom{2x+1}{x-1}=\binom{2x+1}{2x-7}\Rightarrow\begin{cases}x-1=2x+1-(2x-7)\Rightarrow x-1=8\Rightarrow x=9\\ x-1=2x-7\Rightarrow x=6\end{cases}$

b) $\binom{x}{2}-x=\binom{x-2}{2}+3\Rightarrow\dfrac{x!}{2!(x-2)!}-x=\dfrac{(x-2)!}{2!(x-4)!}+3\Rightarrow\dfrac{x(x-1)}{2}-x=\dfrac{(x-2)(x-3)}{2}+3$

$$\Rightarrow\frac{x^2-x-2x}{2}=\frac{x^2-5x+12}{2}\Rightarrow x=6$$

51. Una variable aleatoria *X*, tiene una distribución binomial donde la probabilidad del éxito es *p*= 0,36 y la desviación típica es $\sigma=2{,}4$ Halla la probabilidad de que la variable tome un valor igual que su media.

La distribución de la variable aleatoria es $X\sim\text{Bin}(n;\,p=0{,}36)$, con $q=1-0{,}36=0{,}64$, de la expresión de la varianza se tiene:
$\sigma^2=\text{Var}(X)=npq\Rightarrow 2{,}4^2=n\cdot 0{,}36\cdot 0{,}64=5{,}76\Rightarrow n=25$

La esperanza será entonces $E[X]=np=25\cdot 0{,}36=9$, de donde $P(X=9)=\binom{25}{9}0{,}36^9\cdot 0{,}64^{16}=0{,}164\,386$.

52. Considera las variables binomiales $X \sim \text{Bin}(n = 24; p = 0,2)$ e $Y \sim \text{Bin}(n = 12; p = 0,4)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tienen los datos más agrupados en torno a la media?

c) Halla las siguientes probabilidades:

i) $P(X = 12)$ **ii)** $P(Y = 6)$

a) Por tratarse de distribuciones binomiales:

$E[X] = n_X \cdot p_X = 24 \cdot 0,2 = 4,8$

$E[Y] = n_Y \cdot p_Y = 12 \cdot 0,4 = 4,8$

b) Para responder a esta cuestión, se calculan los coeficientes de variación.

$$\sigma_X^2 = Var[X] = n_X \cdot p_X \cdot q_X = 24 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 3,84 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,84} = 1,959592 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|} = \frac{1,959592}{4,8} = 0,40825$$

$$\sigma_Y^2 = Var[X] = n_Y \cdot p_Y \cdot q_Y = 12 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,88 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2,88} = 1,697056 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_Y}{|\mu_Y|} = \frac{1,697056}{4,8} = 0,35355$$

La variable Y tiene los datos más agrupados alrededor de la media.

c) $P(X = 12) = \binom{24}{12} 0,2^{12} \cdot 0,8^{12} = 0,000761$ $P(Y = 6) = \binom{12}{6} 0,4^{6} \cdot 0,6^{6} = 0,17658$

CUESTIONES

53. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Es suficiente con expresar 2 como suma de 1+1 y desarrollar la potencia del binomio:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^j \cdot 1^{n-j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

54. Encuentra dos distribuciones binomiales con la misma esperanza, de modo que el número de ensayos realizados en una de ellas sea el triple que en la otra.

Se busca $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ tales que: $E[X] = np_1 = 3np_2 = E[Y] \Rightarrow p_1 = 3p_2$

Sirven, por tanto, cualquier par que cumplan esta condición, es decir $X \sim \text{Bin}(n, 3p_2)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ lo que obliga a que $3p_2 \leq 1 \Rightarrow p_2 \leq \frac{1}{3}$.

Por ejemplo $X \sim \text{Bin}(n; 0,6)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n; 0,2)$

PROBLEMAS

55. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la probabilidad de que:

a) No falle ninguno.

b) Fallen exactamente 3 componentes.

c) Fallen como mucho 2 componentes.

d) Fallen al menos dos componentes si se sabe que ya ha fallado al menos uno.

La variable aleatoria es$X$: "número de componentes que fallan de las 6". La distribución de X es $\text{Bin}(n=6;\ p=0{,}15)$

a) $P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0{,}15^0\cdot 0{,}85^6=0{,}85^6=0{,}3771$

b) $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0{,}15^3\cdot 0{,}85^3=0{,}85^6=0{,}04145$

c) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3771+0{,}3993+0{,}1762=0{,}9526$

d) En este caso, se trata de una probabilidad condicionada: $P(X\ge 2|X\ge 1)=\dfrac{P(X\ge 2,\ X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\dfrac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}$

$P(X\ge 2)=1-P(X=1)-P(X=0)=1-(0{,}3771+0{,}3993)=0{,}2236$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}3771=0{,}6229$ $P(X\ge 2|X\ge 1)=\dfrac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}=\dfrac{0{,}2236}{0{,}6229}=0{,}3590$

56. En el último mes, un vendedor de periódicos ha devuelto por término medio el 30% de los ejemplares diarios que le han servido del periódico A. Si un día concreto, elegido al azar, le sirven 15 unidades, calcula la probabilidad de que

a) Devuelva por lo menos 4.

b) Venda todos los periódicos.

c) Venda más de 12, si se sabe que al menos ha vendido 10.

Sea la variable aleatoria X: "número de ejemplares devueltos, de los 15".La distribución es $X\sim\text{Bin}(n=15;\ p=0{,}3)$

a) $P(X=0)=\binom{15}{0}\cdot 0{,}7^{15}=0{,}00475$ $\quad P(X=1)=\binom{15}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^{14}=0{,}03052$

$P(X=2)=\binom{15}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^{13}=0{,}09156$ $\quad P(X=3)=\binom{15}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^{12}=0{,}17004$

$P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]=0{,}70313$

b) En este caso, no devolvería ninguno, $X=0$, de modo que, del apartado anterior: $P(X=0)=0{,}00475$.

c) Se trata de una probabilidad condicionada, teniendo en cuenta, que vender más de12 ejemplares, significa devolver menos de 3 y vender al menos 10 es equivalente a devolver como mucho 5.

$P(X<3\,|\,X\le 5)=\dfrac{P(X<3\wedge X\le 5)}{P(X\le 5)}=\dfrac{P(X<3)}{P(X\le 5)}=\dfrac{0{,}12683}{0{,}72162}=0{,}17576$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156=0{,}12683$

$P(X=4)=\binom{15}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^{11}=0{,}21862$ $\quad P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10}=0{,}20613$

$P(X\le 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$
$=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156+0{,}17004+0{,}21862+0{,}20613=0{,}72162$

57. En un examen tipo test se debe responder a 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas solo una de las cuales es correcta. Para aprobar es preciso contestar correctamente al menos a 6 preguntas. Calcula la probabilidad de que un estudiante apruebe si:

a) Contesta al azar a todas las preguntas. **b)** Domina la mitad de la asignatura.

Sea la variable aleatoria *X*: "numero de respuestas correctas, de las 10".

En este caso, como la respuesta a cada pregunta es al azar y se dispone de 4 posibles respuestas, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p=0,25$ y, en consecuencia, la variable *X* tiene distribución $\text{Bin}\ (n=10; p=0,25)$.

a) De manera que la probabilidad de contestar correctamente al menos a 6 preguntas (para aprobar) es:

$$P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$
$$=0,0162+0,0031+0,0004+0,0000+0,0000=0,0197$$

Donde cada probabilidad se puede obtener de la tabla de la binomial o se calcula mediante:

$$P(X=k)=\binom{05}{k}\cdot 0,25^k\cdot 0,75^{10-k}$$

b) Si domina la mitad de la asignatura, entonces la probabilidad de acertar cada pregunta es $p=0,5$ y, por tanto, la distribución de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n=10,\ p=0,5)$:

$$P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$
$$=0,2051+0,1172+0,0439+0,0098+0,0010=0,377$$

58. En el control de calidad del proceso de fabricación de baterías de litio de una determinada marca, el 15% de las unidades es rechazado. De la producción de un día determinado se eligen al azar 8 baterías. Calcula la probabilidad de que:

a) Al menos una de las baterías sea rechazada.

b) Las ocho pasen el control de calidad.

c) ¿Cuál es el número mínimo de baterías que debe ser inspeccionado para que se rechace por lo menos una de las bateríascon probabilidad mayor de 0,9 ?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de baterías que son rechazadas, de las 8 seleccionadas". La variable *X* tiene distribución de probabilidad $\text{Bin}\ (n=8;\ p=0,15)$:

a) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,85^8=1-0,2725=0,7275$

b) La probabilidad de que no sea rechazada ninguna (las 8 pasen el control) es $P(X=0)=0,85^8=0,2725$.

c) Si se examinan k baterías elegidas al azar, la probabilidad de que se rechace al menos una de ellas es:

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{k}{0}\cdot 0,15^0\cdot 0,85^k=1-0,85^k$$

Para que esta probabilidad sea superior a 0,9 se tienen que cumplir que $1-0,85^k>0,9$.

Despejando y tomando logaritmos (o tanteando) se obtiene:

$1-0,85^k>0,9\Rightarrow 0,1>0,85^k\Rightarrow \log 0,1>\log 0,85^k=k\cdot\log 0,85$ y por ser $\log 0,85$ negativo: $k>\dfrac{\log 0,1}{\log 0,85}\simeq 14,17$

Como *k* debe ser entero, dando valores a *k*, se obtiene quedeben examinarse por lo menos 15 baterías para que, con probabilidad superior a 0,9, al menos una de ellas sea rechazada.

59. En la consulta de un médico especialista 3 de cada 10 pacientes son diagnosticados con una enfermedad grave. Si se eligen 8 pacientes al azar de esta consulta, calcula la probabilidad de que hayan sido diagnosticados con enfermedad grave:

a) Como máximo 3 pacientes. **b)** Más de 2 pacientes.

Sea la variable aleatoria X: "número de pacientes, de los 8 elegidos, diagnosticados con una enfermedad grave".
La variable X tiene una distribución $\text{Bin}\,(n = 8;\ p = 0,3)$.

Usando la tabla de la distribución binomial tenemos los siguientes resultados:

a) $P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,0576 + 0,1977 + 0,2965 + 0,2541 = 0,8059$

b) $P(X > 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - 0,0576 - 0,1977 - 0,2965 = 0,4482$

60. En un barrio de una gran ciudad se ha realizado un estudio acerca del número de personas que viven en cada hogar. En la tabla se recogen los resultados de una muestra de 200 hogares.

N.º personas	0	1	2	3	4	5
N.º hogares	6	24	52	64	42	12

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas.

c) Dibuja los diagramas de frecuencias observadas y ajustadas.

d) Comenta la precisión del ajuste realizado.

e) Elegido un hogar al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en él vivan menos de 3 personas?

a) La variable es X: "n.º de personas que viven en cada hogar". Esta variable, toma los valores: 0,1, 2, 3, 4 y 5, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n = 5$ y se debe estimar el parámetro p. Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

x_j	f_j	$x_j f_j$
0	6	0
1	24	24
2	52	104
3	64	192
4	42	168
5	12	60
	200	548

La media de la distribución de frecuencias es $\overline{X} = \dfrac{548}{200} = 2,74$.

Y como la esperanza de la binomial es $E[X] = np = 5p$, igualando resulta:
$5p = 2,74 \ \Rightarrow\ p = 0,548$.

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es
$X \sim \text{Bin}\,(n = 5;\ p = 0,548)$.

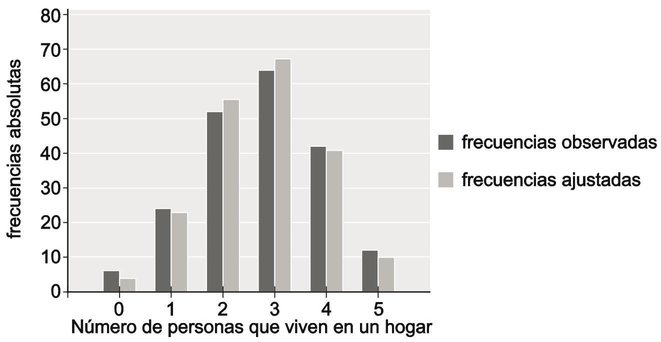
b) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,548^0 \cdot 0,452^5 = 0,01887$ $\qquad P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0,548^1 \cdot 0,452^4 = 0,11437$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,548^2 \cdot 0,452^3 = 0,27732$ $\qquad P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,548^3 \cdot 0,452^2 = 0,33622$

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,548^4 \cdot 0,452^1 = 0,20381$ $\qquad P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,548^5 \cdot 0,452^0 = 0,04942$

c)

x_j	Frecuencia observada f_j	Probabilidad. ajustada $P(X=x_j)$	Frecuencia ajustada $200 \cdot P(X=x_j)$
0	6	0,01887	3,77
1	24	0,11437	22,87
2	52	0,27732	55,46
3	64	0,33622	67,24
4	42	0,20381	40,76
5	12	0,04942	9,88
	200	1	200



d) El ajuste es bastante bueno, ya que las frecuencias ajustadas se aproximan razonablemente a las observadas.

e) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,01887 + 0,11437 + 0,27732 = 0,41056$

61. Una granja envasa todos los huevos que produce en cajas de 12 unidades. En el proceso de transporte se rompen el 10% de los huevos envasados. Un cliente compra en el supermercado una caja de esta granja, calcula la probabilidad de que:

a) No tenga ningún huevo roto.

b) Haya exactamente un huevo roto.

c) Por lo menos uno de los huevos de la caja esté roto.

Suponiendo que la caja ha sido elegida al azar, Sea la variable aleatoria *X*: "número de huevos rotos, de los 12 que contiene la caja". La variable *X* tiene una distribución $\text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}10)$.

a) $P(X = 0) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}28243$

b) $P(X = 1) = \binom{12}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{11} = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}31381 = 0{,}37657$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}28243 = 0{,}71757$

62. En un centro educativo, el 25% de los alumnos está inscrito en alguna actividad extraescolar. Si elegimos al azar 15 alumnos de este centro, calcula la probabilidad de que

a) Ninguno participe en actividades extraescolares.

b) Entre 6 y 8 participen en actividades extraescolares.

c) Como mucho 4 participen en actividades extraescolares.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de alumnos, de los 15 seleccionados, inscritos en actividades extraescolares". La distribución de probabilidad de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n = 15;\ p = 0{,}25)$.

a) $P(X = 0) = \binom{15}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}01336$

b) $P(6 \leq X \leq 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{15}{6} \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75^9 + \binom{15}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^8 + \binom{15}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^7 =$

$= 0{,}09175 + 0{,}03932 + 0{,}01311 = 0{,}14418$

c) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$= \binom{15}{0} 0{,}75^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^{12} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^{11} =$

$= 0{,}01336 + 0{,}06682 + 0{,}15591 + 0{,}2250 + 0{,}22520 = 0{,}68649$

63. De las dos situaciones siguientes, ¿cuál es la que tiene mayor probabilidad de ocurrir?

a) Obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

b) Obtener al menos 7 caras al lanzar una moneda 10 veces.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de ases en el lanzamiento de seis dados" (equivale a lanzar un dado seis veces), cuya distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n = 6;\ p = \frac{1}{6}\right)$.

La probabilidad de obtener al menos dos seises se calcula de la siguiente forma:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 =$$
$$= 1 - 0{,}33490 - 0{,}40188 = 0{,}26322$$

b) Sea la variable Y: "n.º de caras al lanzar una moneda 10 veces", cuya distribución es $Y \sim \text{Bin}(n = 10;\ p = 0{,}5)$

La probabilidad de obtener al menos 7 caras es:

$$P(Y \geq 7) = P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{15}{7}0{,}5^{10} + \binom{15}{8}0{,}5^{10} + \binom{15}{9}0{,}5^{10} + \binom{10}{10}0{,}5^{10} =$$
$$= 0{,}11719 + 0{,}04394 + 0{,}00977 + 0{,}00098 = 0{,}17188$$

Luego es más probable obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

64. Según los datos del organismo correspondiente el 80% de los incendios que se producen en la época de calor son provocados. Si de todos los incendios que se han producido en una determinada región se eligen 12 al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Más de 10 hayan sido provocados.

b) Como mucho 3 hayan sido accidentales.

Sea la variable aleatoria X: "número de incendios no provocados, de los 12 seleccionados". La variable X tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}2)$.

a) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{11} == 0{,}06872 + 0{,}20616 = 0{,}27488$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$$= 0{,}06872 + 0{,}20616 + \binom{12}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^9 = 0{,}79\,457$$

65. Según una encuesta, el 52% de los hogares europeos tiene contratados servicios de Internet.

a) Si se seleccionan 20 hogares al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más de 17 tengan contratados servicios de Internet?

b) Si se elige una muestra de 1200 hogares, ¿cuál es el número esperado de hogares que tendrán contratados servicios de Internet?

Sea la variable aleatoria X: "número de hogares europeos, de los 20 seleccionados, que tienen contratados servicios de Internet". La variable X tiene distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\ (n = 20,\ p = 0{,}52)$

a) La probabilidad de que en más de 17 hogares haya Internet, entre los 20 seleccionados, es:

$$P(X > 17) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{18} \cdot 0{,}52^{18} \cdot 0{,}48^2 + \binom{20}{19} \cdot 0{,}52^{19} \cdot 0{,}48^1 + \binom{20}{20} \cdot 0{,}52^{20} \cdot 0{,}48^0 =$$
$$= 0{,}0003383 + 0{,}0000386 + 0{,}0000021 = 0{,}0003790$$

b) Si la muestra consiste en 1500 hogares, la distribución sería $X \sim \text{Bin}\ (n = 1200,\ p = 0{,}52)$, por lo que el número esperado de hogares que tendrán servicios de Internet sería: $E[X] = np = 1200 \cdot 0{,}52 = 624$.

66. Una empresa comercializa 3 productos y, le interesa saber si, tras una campaña de publicidad, ha tenido éxito en darlos a conocer. Los resultados de una encuesta realizada a 400 personas acerca de su conocimiento de estos productos se recogen en la tabla siguiente: 35 encuestados no conocen ninguno de los productos, 130 conocen solo 1, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	35	130	170	65

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Contrasta el ajuste realizado y representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas.

La variable X: "n.º de productos, de los tres elegidos, que se conocen tras la campaña de publicidad".
Esta variable, toma los valores: 0,1, 2 y 3, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n;\,p)$, el parámetro $n = 3$ y se debe estimar el parámetro p.

a) Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

La media de la distribución de frecuencias es $\overline{X} = \dfrac{665}{400} = 1{,}6625$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 3p$, igualando resulta: $3p = 1{,}6625 \Rightarrow p = 0{,}5542$

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es: $X \sim \text{Bin}\ (n = 3;\ p = 0{,}5542)$

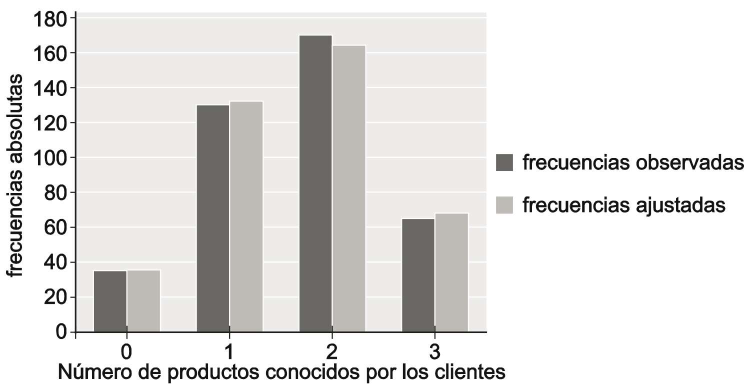
x_j	f_j	x_jf_j
0	35	0
1	130	130
2	170	340
3	65	195
	400	665

b) Una vez ajustada la distribución binomial a la distribución de frecuencias dada, se calculan las frecuencias ajustadas. La probabilidad de cada valor de la variable ajustada es:

$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}5542^0 \cdot 0{,}4458^3 = 0{,}08860$ $\qquad P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}5542^1 \cdot 0{,}4458^2 = 0{,}33042$

$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}5542^2 \cdot 0{,}4458^1 = 0{,}41077$ $\qquad P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5542^3 \cdot 0{,}4458^0 = 0{,}17022$

x_j	frecuencias observadas x_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias ajustadas
0	35	0,08860	35,44
1	130	0,33042	132,17
2	170	0,41077	164,31
3	65	0,17022	68,09
	400	1	400



Como se puede observar en la tabla y en el gráfico el ajuste de la distribución de frecuencias por la distribución binomial es muy bueno.

67. Los datos de una reciente encuesta aseguran que el 46% de los jubilados de una determinada localidad camina al menos una hora diaria por prescripción médica. Del colectivo de jubilados se eligen 12 personas al azar:

a) Determina la distribución de la variable X: "número de jubilados de los 12 que camina al menos una hora diaria".

b) Calcula la probabilidad de que más de la mitad de los jubilados seleccionados camine al menos una hora diaria.

La elección se supone con reemplazamiento para que la probabilidad de elegir, en cada paso, uno de los jubilados sea la misma.

a) La variable aleatoria X: "número de jubilados, de los 12, que camina al menos una hora diaria" es binomial:

$X \sim \text{Bin}(n = 12;\ p = 0,46)$.

b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$

$= \binom{12}{7} \cdot 0,46^7 \cdot 0,54^5 + \binom{12}{8} \cdot 0,46^8 \cdot 0,54^4 + \binom{12}{9} \cdot 0,46^9 \cdot 0,54^3 \binom{12}{10} \cdot 0,46^{10} \cdot 0,54^2 \binom{12}{11} \cdot 0,46^{11} \cdot 0,54^1 \binom{12}{12} \cdot 0,46^{12} =$

$= 0,158\,49 + 0,08438 + 0,03195 + 0,00816 + 0,00126 + 0,00009 = 0,28433$

68. El 60% de los pacientes que atiende la consulta de un médico supera los niveles máximos de glucosa en sangre. Si de la consulta se eligen 6 pacientes al azar:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable X: "número de pacientes que supera el nivel máximo de glucosa"?

b) Calcula la probabilidad de que al menos dos pacientes superen los niveles de glucosa.

c) Si se sabe que al menos un paciente supera el nivel máximo de glucosa, ¿Cuál es la probabilidad de que sean menos de 5 los que lo superen?

a) La distribución de probabilidad de la variable X: "número de pacientes, de los 6 elegidos, que supera el nivel máximo de glucosa" es binomial $X \sim \text{Bin}(n = 6; p = 0,6)$.

b) La probabilidad de que al menos dos de los seis pacientes superen los niveles de glucosa es:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,4^6 - \binom{6}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^5 = 1 - 0,00410 - 0,03686 = 0,95904$

También se puede resolver este apartado, utilizando la variable Y: " número de pacientes, de los 6, que no supera el nivel máximo de glucosa", puesto que $Y \sim \text{Bin}(n = 6;\ p = 0,4)$, en cuyo caso $P(X = k) = P(Y = n - k)$

Las probabilidades de Y pueden obtenerse la tabla de la binomial. Entonces:

$P(X \geq 2) = P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 4) =$

$= 0,04666 + 0,18662 + 0,31104 + 0,27648 + 0,13824 = 0,95904$

c) Se trata de una probabilidad condicionada: $P(X < 5 \mid X \geq 1) = \dfrac{P(1 \leq X < 5)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{0,76262}{0,99590} = 0,76576$

$P(1 \leq X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3 + P(X = 4) = 0,03686 + 0,13824 + 0,27648 + 0,31104 = 0,76262$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,00410 = 0,99590$

69. El 10% de las botellas de 1 litro de aceite de oliva llenadas por una máquina envasadora contienen, realmente, una cantidad inferior al litro. Un cliente compra una caja de 12 botellas envasadas en esta máquina:

a) Determina la distribución de la variable *Y*: "número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite".

b) ¿Cuál es el número esperado de botellas de la caja que contienen una cantidad inferior al litro? ¿Y su desviación típica?

c) Calcula la probabilidad de que la caja contenga dos botellas con menos de 1 litro de aceite.

d) Calcula la probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite?

Se entiende que, dado el volumen de producción de la máquina, las botellas han sido elegidas de forma independiente.

a) La variable *Y*: "número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite" tiene una distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\,(n = 12;\ p = 0{,}1)$.

b) La esperanza y la desviación típica de la variable aleatoria *Y* son, respectivamente:

$E[Y] = np = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}08 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}08} = 1{,}0392$

c) La probabilidad de que la caja contenga exactamente dos botellas con menos de 1 litro de aceite es:

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}23013$$

d) La probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite es:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{11} = 1 - 0{,}28243 - 0{,}37657 = 0{,}341$$

70. En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato A obtuvo el 52% de los votos emitidos. El resto votó a otro candidato o lo hizo en blanco.

Si de la población que ha participado en la votación se elige una muestra aleatoria de 10 personas, calcula la probabilidad de que entre estos:

a) Más del 60% haya votado al candidato A.

b) Menos de la mitad haya votado al candidato A.

c) Más del 60% haya votado al candidato A si se sabe que por lo menos la mitad le votó.

NOTA: Se supone que en cada elección, de las 10, la probabilidad de que la persona seleccionada haya votado al candidato a es la misma, porque la elección se haga con reemplazo o porque el tamaño de la muestra es muy pequeño respecto al de la población.

Sea *X*: "número de personas, de las 10 seleccionadas, que han votado al candidato A".

La distribución de probabilidad de *X* es $X \sim \text{Bin}(n = 10;\ p = 0{,}52)$.

a) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}52^7 \cdot 0{,}48^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}52^8 \cdot 0{,}48^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}52^9 \cdot 0{,}48 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}52^{10} =$

$= 0{,}13644 + 0{,}05543 + 0{,}01334 + 0{,}00145 = 0{,}20665$

b) $P(X < 5) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) - P(X > 6) = 1 - \binom{10}{5} \cdot 0{,}52^5 \cdot 0{,}48^5 - \binom{10}{6} \cdot 0{,}52^6 \cdot 0{,}48^4 - 0{,}20665 =$

$= 1 - 0{,}24413 - 0{,}22040 - 0{,}20665 = 0{,}32882$

c) $P(X > 6 \mid X \geq 5) = \dfrac{P(X > 6)}{P(X \geq 5)} = \dfrac{0{,}20665}{1 - 0{,}32882} = 0{,}30789$

71. Sea la variable aleatoria *X*: "número de caras obtenido al lanzar 6 veces una moneda trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es 0,25".

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como mucho una cara en 6 lanzamientos?

b) Calcula el valor esperado de caras en los 100 lanzamientos.

c) ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que habría que realizar para que se obtenga al menos una cara con probabilidad superior a 0,5?

La variable aleatoria *X*: "número de caras obtenido al lanzar seis veces la moneda" ; $X \sim \text{Bin}(n=6;\ p=0,25)$.

a) Puesto que la moneda está trucada y la probabilidad de obtener cara en un ensayo es 0,25.La probabilidad de obtener como mucho una cara es $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,1780 + 0,3560 = 0,534$.

b) Si la moneda se lanza 100 veces, la variable *Y*: "número de caras en los cien lanzamientos", tiene una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n=100,\ p=0,25)$ de modo que su esperanza es $E[Y] = np = 100 \cdot 0,25 = 25$.

c) Como la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es 0,25, si el experimento se repite *k* veces, la probabilidad de obtener al menos una cara es:

$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{k}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^k = 1 - 0,75^k$ y debe ser superior a 0,5.

$$1 - 0,75^k > 0,5 \Rightarrow 0,5 > 0,75^k \Rightarrow \log 0,5 > \log 0,75^k = k \log 0,75 \Rightarrow \frac{\log 0,5}{\log 0,75} < k \Rightarrow k > 2,41$$

Por lo que el experimento debe repetirse al menos 3 tres veces para obtener al menos una cara con probabilidad superior a 0,5.

72. La mitad de los vehículos que cruzan una pequeña población supera los límites de velocidad permitidos. En un día elegido al azar se seleccionan, también al azar, 20 vehículos que cruzaron la población. Halla el número esperado de vehículos que superen la velocidad permitida y calcula la probabilidad de que:

a) Más de 15 vehículos superen el límite de velocidad permitido.

b) Todos los vehículos crucen correctamente la población.

c) ¿Cuál es el número esperado de vehículos que infringirán la norma de limitación de velocidad?

d) ¿Cuántos vehículos deben pasar, como mínimo, para que con probabilidad superior a 0,8, por lo menos dos infrinjan la limitación de velocidad?

El reemplazamiento asegura la independencia de las observaciones. La variable aleatoria es *X*: "número de vehículos, de los 20 elegidos, que supera los límites de velocidad permitidos", y tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}(n=20;\ p=0,5)$.

Por tanto, el número esperado de vehículos que supera los límites de velocidad será: $E[X] = np = 20 \cdot 0,5 = 10$.

a) $P(X>15) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) =$

$$= \binom{20}{16} \cdot 0,5^{16} \cdot 0,5^4 + \binom{20}{17} \cdot 0,5^{17} \cdot 0,5^3 + \binom{20}{18} \cdot 0,5^{18} \cdot 0,5^2 + \binom{20}{19} \cdot 0,5^{19} \cdot 0,5^1 + \binom{20}{20} \cdot 0,5^{20} =$$

$$= 0,00462 + 0,00109 + 0,00018 + 0,00002 + 0,00000 = 0,00591$$

b) $P = \binom{20}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^{20} = 0,000000954$

c) Es la esperanza matemática de la variable *X* que ya estaba calculada $E[X] = 10$.

d) Si k es el número de vehículos seleccionados, la distribución de la variable *X* es $\text{Bin}(n=k; p=0,5)$.

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{k}{0} 0,5^k - \binom{k}{1} 0,5^k = 1 - 0,5^k - k0,5^k = 1 - (1+k)0,5^k \Rightarrow 0,5^k = 1 - (1+k)0,5^k$$

Y debe elegirse el primer valor de *k* de tal manera que $1 - (1+k)0,5^k > 0,8$;que puede calcularse tanteando con valores, por ejemplo, a partir de $k = 3$. El primer valor que cumple esta condición es *k*= 5.De modo que deben pasar al menos 5 coches para asegurar que con probabilidad superior a 0,8 al menos dos de ellos superarán el límite de velocidad establecido.

73. El 15% de los instrumentos de una orquesta es de viento. Se eligen al azar 4 músicos de la orquesta.

a) Escribe la función de masa de probabilidad de la variable *X*: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" y dibuja su diagrama de barras.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Calcula la probabilidad de que al menos uno de los 4 seleccionados toque un instrumento de viento.

d) ¿Cuántos músicos habría que seleccionar para que con probabilidad superior a 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento?

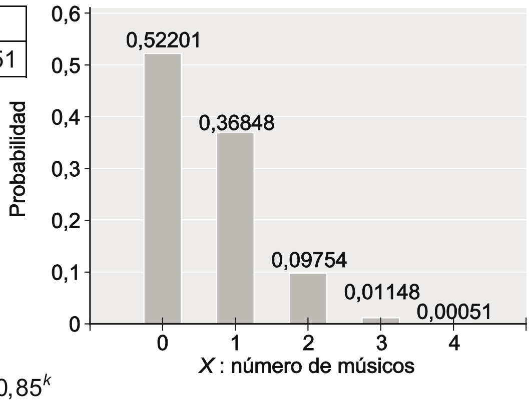
Se entiende que la elección es con reemplazo, es decir, que en cada elección la probabilidad de elegir un músico que toque un instrumento de viento es la misma.

a) La distribución de la variable aleatoria *X*: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" es binomial $X \sim \text{Bin}(4;\ 0{,}15)$

Teniendo que su función de masa de probabilidad tiene la forma: $P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot 0{,}15^x \cdot 0{,}85^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

En la tabla siguiente se recogen los valores de la variable y sus probabilidades:

x	0	1	2	3	4
P(*X*= *x*)	0,52201	0,36848	0,09754	0,01148	0,00051



b) $E[X] = np = 4 \cdot 0{,}15 = 0{,}60$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}51$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}52201 = 0{,}47799$

d) Si se seleccionan *k* músicos de la orquesta, la probabilidad de que al menos uno de ellos toque un instrumento de viento es:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}85^k \Rightarrow 1 - 0{,}85^k > 0{,}8 \Rightarrow 0{,}2 > 0{,}85^k$

$\Rightarrow \log 0{,}2 > \log 0{,}85^k = k \cdot \log 0{,}85 \Rightarrow \dfrac{\log 0{,}2}{\log 0{,}85} < k \Rightarrow k > 9{,}9$

Luego deben elegirse al menos 10 músicos para que con probabilidad mayor de 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento.

74. Un examen de tipo test consta de 12 preguntas, cada una de ellas con cuatro posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Al realizar el examen solo debe marcarse una y solo una de las cuatro respuestas posibles.

Si es obligatorio contestar a todas las preguntas y cada respuesta acertada suma un punto y cada respuesta fallada resta 0,5 puntos y para aprobar hay que obtener al menos 6 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona apruebe respondiendo al azar?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de preguntas contestadas correctamente por el alumno, de las 12 del examen".

La variable *X* sigue una distribución $\text{Bin}\,(n = 12; p = 0{,}25)$, al considerarse que las preguntas se contestan de forma independiente y que si se responde al azar, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0{,}25$.

Para aprobar, el alumno tiene que obtener 6 o más puntos. Es decir, según el sistema de puntuación, debe tener al menos 8 aciertos, ya que 8 aciertos y 4 fallos suponen $1 \cdot 8 - 0{,}5 \cdot 4 = 6$ puntos.

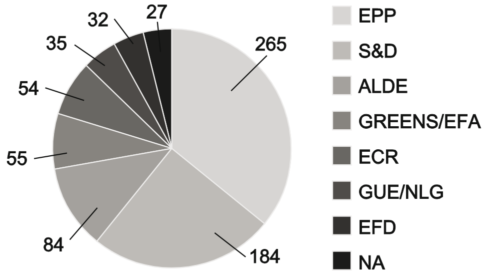
La probabilidad de que el alumno conteste correctamente al menos 8 de las 12 preguntas (si responde al azar) es:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$$

$$= \binom{12}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^5 + \binom{12}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^3 + \binom{12}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^2 + \binom{12}{11} \cdot 0{,}25^{11} \cdot 0{,}75^1 + \binom{12}{12} \cdot 0{,}25^{12} =$$

$$= 0{,}002390 + 0{,}000354 + 0{,}000035 + 0{,}000002 + 0{,}00000 = 0{,}002781$$

75. El gráfico siguiente muestra la composición del parlamento europeo en el periodo 2009– 2014.



Si de los 736 miembros del parlamento se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10:

a) Describe la distribución de la variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP".

b) Describe la distribución de la variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&P".

c) ¿Cuál es la distribución de la variable *W*= *X*+*Y*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P"?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que entre los 10 parlamentarios elegidos al azar no haya ninguno de los grupos EPP y S&P?

NOTA: se supone que la elección es uno a uno con reemplazo, de manera que en cada elección, la probabilidad de elegir un parlamentario de un grupo concreto es la misma.

a) La variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $X \sim \text{Bin}\left(n = 10,\ p = \frac{265}{736} = 0{,}36\right)$.

b) La variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&D, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}\left(n = 10;\ p = \frac{184}{736} = 0{,}25\right)$.

c) La variable aleatoria *W*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P, de los 10 seleccionados":

$W \sim \text{Bin}\left(n = 10;\quad p = \frac{265+184}{736} = 0{,}61\right)$

d) La probabilidad de que entre los 10 parlamentarios seleccionados no haya ninguno de los grupos EPP y S&P es $P(W = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}61^0 \cdot 0{,}39^{10} = 0{,}000\,0814$.

76. Un pequeño hotel familiar cuenta con 12 habitaciones. En temporada alta, la petición de reservas supera la capacidad del hotel. Además por diferentes motivos el 2% de las reservas se anulan a última hora.

Si los propietarios deciden admitir hasta 14 reservas para una noche cuando la demanda lo permita, calcula la probabilidad de que:

a) En un día elegido al azar se presentan más clientes que habitaciones disponibles.

b) Sobren habitaciones.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de cancelaciones de reservas en el hotel". La variable *X* sigue una distribución $\text{Bin}\ (n = 14;\ p = 0{,}02)$.

a) Si se presentan más clientes que habitaciones disponibles es porque el número de cancelaciones, de las 14 reservas, es inferior a 2 y su probabilidad es:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} + \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} = 0{,}75364 + 0{,}21533 = 0{,}96897$$

b) Sobrarán habitaciones si el número de cancelaciones es superior a 2, cuya probabilidad es:

$$P(X > 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} - \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} - \binom{14}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{12} =$$

$$= 1 - 0{,}75364 - 0{,}21533 - 0{,}02856 = 0{,}00247$$

77. Demuestra la expresión: $\dbinom{m-1}{n}+\dbinom{m-1}{n-1}=\dbinom{m}{n}$.

Si se hace uso de la propiedad: $\dbinom{m}{n}+\dbinom{m}{n-1}=\dbinom{m+1}{n}$ y en lugar de *m*, se considera el caso (*m*– 1), se tiene directamente que: $\dbinom{m-1}{n}+\dbinom{m-1}{n-1}=\dbinom{m-1+1}{n}=\dbinom{m}{n}$

También podemos hacer uso del desarrollo de los números combinatorios.

ENTORNO MATEMÁTICO

¿Contrato el seguro?

La compañía de seguros Mondosegu está llevando a cabo una agresiva campaña de publicidad en los medios de comunicación con el fin de captar clientes para sus pólizas de seguros de vida.

El padre de Andrés, estudiante de 1º de Bachillerato, comenta en casa la posibilidad de contratar una de estas pólizas y está preocupado porque no le timen con la cuota de 250 € que debe pagar. Andrés, que acaba de estudiar los temas relativos a estadística y probabilidad se decide a investigar cuál puede ser el coste para la compañía de una póliza de las que anuncia en su publicidad.

Este tipo de pólizas solo producen gastos (significativos) cuando la compañía debe pagar una indemnización. Por información histórica se sabe que en Mondosegu:

- **1 de cada 10 000 pólizas da lugar a una indemnización de 250 000 €.**
- **1 de cada 5000 pólizas da lugar a una indemnización de 150 000 €.**
- **1 de cada 1000 pólizas da lugar a una indemnización de 50 000 €.**
- **1 de cada 500 pólizas da lugar a una indemnización de 25 000 €.**
- **1 de cada 100 pólizas da lugar a una indemnización de 5000 €.**

a) ¿Cuál es el coste esperado de la póliza?

b) Lo que pide la compañía, ¿es adecuado desde el punto de vista empresarial?

(adaptado de "El hombre anumérico", John Allen Paulos)

Se entiende que la proporción restante, hasta llegar al 100% no implica indemnización, o que esta no es relevante, o que se ha contabilizado de forma genérica en las anteriores ofrecidas en el enunciado.
Se recoge la información en una tabla del siguiente modo:

x_j	250 000	150 000	50 000	25 000	5000	0	
p_j	0,0001	0,0002	0,001	0,002	0,01	0,9867	
x_jp_j	25	30	50	50	50	0	205

En estas condiciones, el gasto medio esperado por póliza suscrita es $E[X]=205$.

Cada póliza supone un gasto esperado de 205 € para la compañía, por tanto la cuota supone $\frac{250}{205}\cdot 100=121{,}951\ \%$ de los costes esperados, es decir un beneficio esperado de cerca de un 22 %.

¿Cuándo nos vamos de viaje?

Ana y Juan quedan para ver las fotografías que tomaron en su última salida extraescolar en la que hicieron un reportaje de plantas. En primer lugar ven las 30 que hizo Ana y un rato más tarde, cuando están viendo las de Juan, Ana comenta:

– **"Esa es igual que la que hice yo";**

– **"No, no es igual, solo parecida", afirma Juan.**

–**"¡Qué va!, es idéntica, tu no recuerdas la mía" sentencia Ana.**

La discusión prosigue y Ana pregunta ¿Cuántas fotos de las mías podrías recordar? Se proponen hacer la experiencia con algunos amigos:

1.ºLes muestran 15 imágenes no habituales en las que no aparecen personas durante un tiempo máximo de 5 segundos cada una.

2.ºMezclan al azar las 15 imágenes "antiguas" con 15 "nuevas" y se las muestran a los amigos. Cada uno debe anotar, sin comentar con los demás, si la diapositiva es antigua o nueva.

¿Cuántas diapositivas acertó cada participante? ¿El número de aciertos se debe al azar? ¿Realmente tienen una buena memoria gráfica? ¿Cómo se podría saber?

Repite con tus amigos el experimento de Ana y Juan e intenta responder a las preguntas anteriores. Ten en cuenta que si alguien contestó al azar, el experimento se puede comparar con el lanzamiento de una moneda: cara (acertar), cruz (fallar) y por lo tanto estaríamos ante una variable binomial $\text{Bin}\,(n=30; p=0,5)$. En este caso, si por ejemplo un amigo acertó 25 imágenes, ¿pudo haber contestado al azar? ¿Cuántas debería acertar para estar seguros de que no ha contestado al azar?

(adaptado de "El hombre anumérico", John Allen Paulos)

Si el amigo contestó al azar, el número de diapositivas que acierta (X), tiene una distribución binomial de parámetros: $n=30$ y $p=$ 0,5, de manera que la probabilidad de que acierte 25 diapositivas es:

$$P(X=25)=\binom{30}{25}\cdot 0,5^{30}=0,00013$$

Una probabilidad realmente muy pequeña.

Es más, la probabilidad de que, habiendo contestado al azar, acierte 20 o más diapositivas es también muy pequeña, ya que $P(X\geq 20)=0,04937$

Es decir, la probabilidad acertar 20 o más diapositivas es menor que 0,05. Luego el amigo no ha contestado al azar.

El número de aciertos esperado contestando al azar es $E[X]=np=30\cdot 0,5=15$, pero, como se ha visto antes, la probabilidad de acertar muchos más de esa cantidad contestando al azar se reduce drásticamente.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido.

1. Si la esperanza de una variable aleatoria *X* ~ Bin(*n*, *p*) es 5 y su varianza 4, calcula los valores de *n* y *p*.

Igualando la esperanza y la varianza de una variable aleatoria binomial a sus valores y resolviendo el sistema se obtienen los parámetros:

$$\begin{cases} np = 5 \\ np(1-p) = 4 \end{cases} \Rightarrow 5(1-p) = 4 \Rightarrow p = 0,2 \qquad n \cdot 0,2 = 5 \Rightarrow n = 25$$

2. En una comunidad de vecinos, el 60% de las veces que un vecino llega a su portal no encuentra el ascensor en la planta baja. Si de la comunidad se eligen 7 vecinos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 2 encuentren el ascensor en la planta baja

b) Por lo menos 3 encuentren el ascensor en la planta baja.

c) Ninguno encuentre el ascensor.

Se supone que la elección de los vecinos es uno a uno con reemplazo.Sea *X*: “número de vecinos, de los 7, que encuentran el ascensor en la planta baja”. La distribución de *X* es $X \sim \text{Bin}(n = 7; p = 0,4)$.

a) La probabilidad de que sean exactamente 2 los vecinos que encuentren el ascensor en la planta baja es:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 = 0,26127$$

b) La probabilidad de que sean al menos 3 los que se encuentren el ascensor en la planta baja, puede calcularse utilizando el complementario, es decir, que menos de tres se encuentren el ascensor en la planta baja, es:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,6^7 - \binom{7}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^6 - \binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 =$$

$$= 1 - 0,02799 - 0,13064 - 0,26127 = 0,59119$$

c) La probabilidad de que ninguno encuentre el ascensor es $P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^7 = 0,02799$.

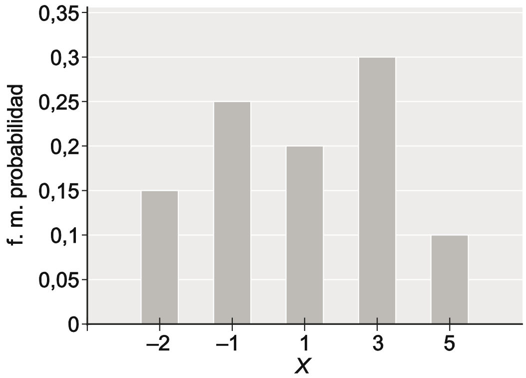
3. Una variable aleatoria *X* toma los valores –2, –1, 1, 3 y 5 con probabilidades respectivas 0,15; 0,25; 0,2; 0,3 y 0,1.

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Halla $P(-1 < X \leq 4)$.

a) Podemos organizar los datos en una tabla y ampliarla para los cálculos posteriores al tiempo que representamos el diagrama de barras de la distribución:



x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
–2	0,15	–0,3	0,6
–1	0,25	–0,25	0,25
1	0,2	0,2	0,2
3	0,3	0,9	2,7
5	0,1	0,5	2,5
	1	1,05	6,25

b) La esperanza de *X* y su varianza son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{5} p_j x_j = 1{,}05 \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot x_j^2 - E[X]^2 = 6{,}25 - 1{,}05^2 = 5{,}1475$$

c) $P(-1 < X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

4. De una baraja de 40 cartas se extraen 15 cartas una a una con reemplazo. Sean las variables aleatorias *X*: número de reyes extraídos. Se pide:

a) Probabilidad de que *X* sea mayor que 2.

b) Número esperado de reyes.

La distribución de $X \sim \mathrm{Bin}(n = 15; p = 0{,}1)$, pues el número de reyes extraídos, en las 15 cartas, pueden ser 0, 1,…, 15, y en cada extracción la probabilidad de obtener un rey es $p = \frac{4}{40} = 0{,}1$ (4 reyes en las 40 cartas).

a) La probabilidad de que *X* sea mayor que 2 viene dada por:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$$
$$= 1 - \binom{15}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} - \binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13} = 1 - 0{,}20589 - 0{,}34315 - 0{,}26690 = 0{,}18406$$

b) La esperanza de la variable*X*es $E[X] = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$.

5. 30 estudiantes respondieron al azar a un test de 5 preguntas con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una era correcta. El número de preguntas acertadas se recoge en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3	4	5	
f_j	6	13	6	3	2	0	30

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Compara analítica y gráficamente las frecuencias observadas y ajustadas.

c) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado correctamente 3 preguntas?

a) Se calcula, en primer lugar, la media de la distribución de frecuencias de la variable X: "nº de preguntas acertadas".

La tabla adjunta, contiene los datos para el cálculo de la media. De manera que la media de la distribución de frecuencias observadas es $\bar{X} = \frac{42}{30} = 1{,}4$.

x_j	f_j: obser.	$f_j x_j$
0	6	0
1	13	13
2	6	12
3	3	9
4	2	8
5	0	0
	30	42

Si se quiere ajustar una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 5;\, p)$, para calcular el parámetro p, se iguala la media de la distribución de frecuencias observadas a la esperanza de la binomial:

$$5p = 1{,}4 \Rightarrow p = \frac{1{,}4}{5} = 0{,}28$$

Luego, debe ajustarse una distribución: $Y \sim \text{Bin}(n = 5; p = 0{,}28)$.

b) Se calculan, en primer lugar las probabilidades de la distribución "ajustada":

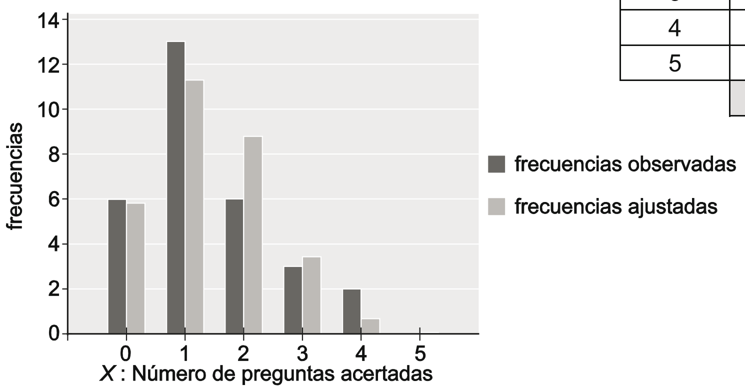
$$P(Y=0) = \binom{5}{0}\cdot 0{,}72^5 \qquad P(Y=1) = \binom{5}{1}\cdot 0{,}28^1\cdot 0{,}72^4 \qquad P(Y=2) = \binom{5}{2}\cdot 0{,}28^2\cdot 0{,}72^3$$

$$P(Y=3) = \binom{5}{3}\cdot 0{,}28^3\cdot 0{,}72^2 \qquad P(Y=4) = \binom{5}{4}\cdot 0{,}28^4\cdot 0{,}72^1 \qquad P(Y=5) = \binom{5}{5}\cdot 0{,}28^5$$

que se resumen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias esperadas (estimadas)

Se puede observar que la aproximación es razonablemente buena comparando la columna de las frecuencias observadas con la de las frecuencias esperadas, una vez ajustada la distribución binomial.

x_j	f_j: obser.	$f_j x_j$	$P(Y=x)$	fr.esper.
0	6	0	0,1935	5,8048
1	13	13	0,3762	11,2870
2	6	12	0,2926	8,7788
3	3	9	0,1138	3,4140
4	2	8	0,0221	0,6638
5	0	0	0,0017	0,0516
	30	42	1	30



6. Desarrolla la potencia $\left(x^2y - 2xy^2\right)^5$.

$$\left(x^2y-2xy^2\right)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(x^2y)^j\cdot(-2xy^2)^{5-j} = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}2^{5-j}x^{j+5}y^{10-j}(-1)^{5-j} =$$

$$= -\binom{5}{0}2^5x^5y^{10} + \binom{5}{1}2^4x^6y^9 - \binom{5}{2}2^3x^7y^8 + \binom{5}{3}2^2x^8y^7 - \binom{5}{4}2x^9y^6 + \binom{5}{5}x^{10}y^5 =$$

$$= -32x^5y^{10} + 80x^6y^9 - 80x^7y^8 + 40x^8y^7 - 10x^9y^6 + x^{10}y^5$$

7. **En una población de cada 2 adultos mayores de 24 años solo uno tiene estudios posteriores a la ESO. Elegidas 8 personas mayores de 24 años, calcula la probabilidad de que:**

a) Exactamente 4 tengan solo estudios de ESO.

b) Al menos dos tengan estudios posteriores a la ESO.

Sea la variable aleatoria*X*: "número de personas, de las 8, que solo tienen estudios de ESO".

a) La distribución de probabilidad de la variable $X \sim \text{Bin}(n=8;\ p=0,5)$, de modo que la probabilidad de que tome exactamente el valor 4 es:

$$P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0,5^4\cdot(1-0,5)^4=0,27344$$

b) Que "al menos dos tengan estudios posteriores" es lo mismo que "A lo sumo uno tiene sólo estudios de ESO", por tanto la probabilidad pedida es:

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{8}{0}\cdot 0,5^8+\binom{8}{1}\cdot 0,5^8=0,03516$$

Relaciona y contesta

Elije la única respuesta correcta en cada caso

1. **La variable aleatoria discreta *X* toma los valores 2, 4, 6 y 8 con probabilidades respectivas $c,\ c+1,\ c+2$ y $c+3$. El valor de *c* es:**

A. 4 **B.** 1,25 **C.** –1,25 **D.** No existe valor para c.

Solución: D.(La suma debería ser 1, lo que fuerza a que c valga –1,25 y por tanto 2 y 4 tendrían probabilidad negativa).

2. **La variable aleatoria *Y* tiene una distribución de probabilidad Bin(*n*, 0,2) y se sabe que su varianza es 8. Entonces:**

A. *n*= 10 **B.** *n*= 48 **C.** *n*= 50 **D.** *n*= 100

Solución: C.

3. **Para intentar ajustar una distribución binomial a un conjunto de datos.**

A. Basta conocer el parámetro *n*.

B. Es preciso obtener la media de los datos observados e identificar *p*.

C. El valor estimado de *p* debe ser aproximadamente 0,5.

D. Se necesitan las frecuencias relativas.

Solución: B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. La distribución binomial modeliza situaciones en las que:

A. Están implicados muchos sucesos.

B. Solo importa si un suceso ocurre o no.

C. Se miden magnitudes.

D. Se cuenta las veces que ocurre un determinado suceso.

Soluciones: B y D.

5. Dada una variable aleatoria binomial *X* ~ Bin(*n*; *p*), con *n* fijado, su variabilidad:

A. Es más grande si p está cerca de 1.

B. Es más pequeña si p está próximo a 0.

C. Es máxima si $p=0,5$.

D. No está influenciada por el valor de p.

Soluciones: B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

Sea la variable aleatoria *X* ~ Bin(*n*, *p*). Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $E[X]=\mu$, $\text{Var}(X)=0,2\mu$ **2.** $p=0,8$ y $n=1,25\mu$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

Solución: A.

Señala el dato innecesario para contestar

Para calcular la probabilidad $P(-1 < X < 2)$ siendo *X* ~ Bin(*n*, *p*) es necesario conocer:

A. Solo *n.*

B. Solo *p.*

C. Tanto *n* como *p.*

D. No hace falta conocer ningún dato.

Solución: C.